

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 9

Aufgabe 1

Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ . Mit dem Zeitintervall $(0, T)$, $T > 0$, wird mit $Q := \Omega \times (0, T)$ ein Raum-Zeit-Zylinder mit Rand $\Sigma := \Gamma \times (0, T)$ definiert. Ferner seien $c_0 \in L^\infty(Q)$, $f \in L^2(Q)$ und $g \in L^2(\Sigma)$ mit den entsprechenden abstrakten Funktionen $c_0(t)$, $f(t)$ und $g(t)$.

Wir betrachten für alle festen $t \in [0, T]$ die folgenden Funktionale $F_j(t) \in H^1(\Omega)^*$, $j = 1, 2, 3$:

$$F_1(t) : v \mapsto (c_0(t)y(t), v)_{L^2(\Omega)},$$

$$F_2(t) : v \mapsto (f(t), v)_{L^2(\Omega)},$$

$$F_3(t) : v \mapsto (g(t), v)_{L^2(\Gamma)}.$$

Es gilt ausserdem $y \in W_2^{1,0}(Q) \cong L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Zeigen Sie, dass die Funktionale linear und stetig sind. Ferner zeige man, dass $F_j \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)$, $j = 1, 2, 3$ gilt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Satz 3.18 aus der Vorlesung: Gegeben seien Funktionen $c_0, b_Q, \alpha, b_\Sigma, b_\Omega \in L^\infty(E)$, $a_\Omega, a_Q, a_\Sigma \in L^2(E)$ sowie Steuerungen $v, u, w \in L^2(E)$ mit $E = Q, \Sigma$ bzw. Ω . $y, p \in W(0, T)$ seien definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + c_0 y &= b_Q v & -p_t - \Delta p + c_0 p &= a_Q \\ \partial_n y + \alpha y &= b_\Sigma u & \partial_n p + \alpha p &= a_\Sigma \\ y(0) &= b_\Omega w & p(T) &= a_\Omega \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_{\Omega} a_\Omega y(\cdot, T) dx + \iint_Q a_Q y dx dt + \iint_{\Sigma} a_\Sigma y ds dt = \iint_{\Sigma} b_\Sigma p u ds dt + \iint_Q b_Q p v dx dt + \int_{\Omega} b_\Omega p(\cdot, 0) w dx.$$

Aufgabe 3

Behandeln Sie die Aufgabe der Anfangswertsteuerung

$$\begin{aligned} \min J(y, u) &:= \frac{1}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{bei } y_t - \Delta y &= 0 & \text{in } Q \\ \partial_\nu y + y &= 0 & \text{in } \Sigma \\ y(0) &= u & \text{in } \Omega \end{aligned}$$

und $|u(x)| \leq 1$ fast überall in Ω . Beweisen Sie die Existenz einer optimalen Steuerung und leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen her.

Homepage der Veranstaltung ist:

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-4.02	
Ü	Di	14-16	WSC-S-U-4.02	Hendrik Feldhordt