FLÄCHEN- UND KANTENBASIERTE FINITE-ELEMENT-APPROXIMATIONEN IN DER FESTKÖRPERMECHANIK

VON GERHARD STARKE UND BENJAMIN MÜLLER

Seit über 50 Jahren hält die Erfolgsgeschichte der Finite-Element-Methode zur Simulation praxisrelevanter mechanischer Prozesse in den Ingenieurwissenschaften bzw. zur näherungsweisen Lösung von Variationsproblemen in der Mathematik nun an. Von Anfang an wurde diese Entwicklung durch die Anwendung in der Festkörpermechanik angetrieben und durch eine enge Zusammenarbeit von Ingenieuren und Mathematikern gekennzeichnet. Die klassische Finite-Element-Methode basiert dabei auf der Minimierung der elastischen Energie bezüglich der Verschiebungen, die durch stetige, stückweise polynomiale Funktionen auf einer Zerlegung des Rechengebietes, beispielsweise in Dreiecke oder Tetraeder, approximiert werden. Ein Vorteil dieser Methode liegt offenbar in ihrer Einfachheit, die insbesondere dadurch gegeben ist, dass die stückweise polynomialen Ansatzfunktionen durch ihre Werte an den Knoten (Eckpunkte der Triangulierung und, bei Erhöhung des Polynomgrads, zusätzlich äquidistante Punkte auf den Kanten, Flächen bzw. Volumina) gegeben sind. Oftmals ist man in Anwendungsproblemen aber vorrangig an der genauen Wiedergabe von Spannungen bzw. dadurch verursachten Kräften interessiert. Große Spannungskomponenten können zu plastischem Materialverhalten oder gar zu Versagen des Materials führen oder auch auf eine mögliche Rissausbreitung in einem geschädigten Material hinweisen. Prinzipiell kann man die Spannungen als abgeleitete Größen aus den gewonnenen Verschiebungen mittels Post-Processing berechnen, jedoch geht dies mit einer schwächeren Approximation einher und kann zu störenden Oszillationen führen. Vom Standpunkt der Festkörpermechanik aus ist die adäquate Beschreibung der Spannungskomponenten (in einem dreidimensionalen Körper) durch die auf eine Fläche wirkenden Kräfte gegeben. Diese sind durch die Normalkomponenten der Spannungen gegeben, deren Darstellung zu unkonventionellen Finite-Element-Ansätzen führt, bei denen nicht Funktionsauswertungen an Knoten sondern (gemittelte) Normalkomponenten auf den Grenzflächen zwischen jeweils zwei Elementen als Freiheitsgrade auftreten.

Aus mathematischer Sicht „leben“ die Spannungen in einem Funktionenraum, der lediglich die Auswertung des Divergenzoperators in einem integralen Sinn (der Impulsbilanz) ermöglichen muss und mit H(div) bezeichnet wird. Auch auf dem Wege der mathematischen Untersuchung der Eigenschaften von H(div) landet man wieder bei den oben beschriebenen Finite-Element-Ansätzen, deren Freiheitsgrade durch Normalkomponenten auf Flächen gegeben sind. Die bekanntesten Vertreter dieser flächen- (und entsprechender kanten-) basierten Finite-Element-Räume sind die Raviart-Thomas-Elemente, die auch bereits seit über 30 Jahren in mathematischen Modellen der Festkörpermechanik zum Einsatz kommen. Für den Fall niedrigster Ordnung bestehen diese einfach aus (vektorwertigen) stückweise linearen Funktionen, die auf den Dreiecksflächen zwischen zwei Tetraedern jeweils konstante Normalkomponente besitzen. Man kann sich leicht überlegen, dass diese dann durch die Vorgabe dieser vier konstanten Normalkomponenten auch im Innern der Tetraeder eindeutig festgelegt sind. Da dies für jede Zeile des Spannungstensors nötig ist, haben wir also (mindestens) drei Freiheitsgrade pro Fläche einer Tetraeder-Zerlegung eines dreidimensionalen Körpers. Der Ansatzraum von nächsthöherem Grad ist links in Abbildung 1 skizziert:

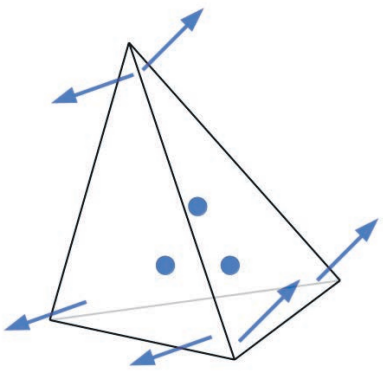


Abbildung 1: Dreidimensionales Raviart-Thomas-Element zweitniedrigsten Grades.

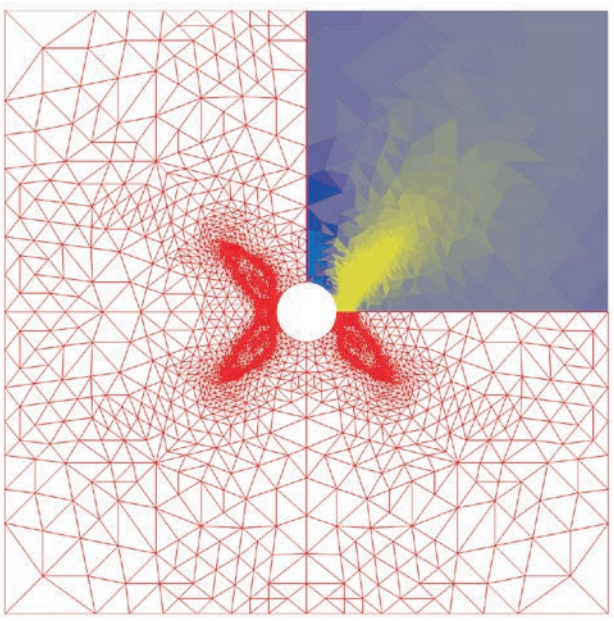


Abbildung 2: Deviatorische Spannung und Adaptivität in der elastoplastisch verformten Lochplatte.

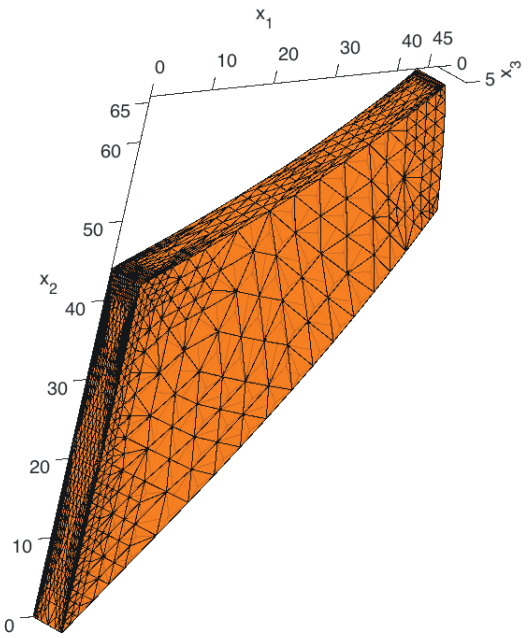


Abbildung 3: Adaptiv verfeinerte Triangulierung eines dreidimensionalen elastisch verformten Körpers.

Jede Zeile des Spannungstensors ist durch eine vektorwertige stückweise quadratische Funktion gegeben, die zusätzlich dadurch eingeschränkt ist, dass die Normalkomponente auf den Dreiecksflächen zwischen zwei Tetraederelementen sich jeweils auf ein Polynom vom Grad 1 reduziert. Diese kann durch jeweils drei Freiheitsgrade (für die Normalkomponenten) auf jeder Fläche und jeweils drei Freiheitsgrade pro Element repräsentiert werden. Zur Spannungsdarstellung auf einer Tetraederzerlegung ergeben sich hier also insgesamt neun Werte pro Fläche und neun Werte pro Element.

Als Variationsprinzip dient die zur Energieminimierung bezüglich der Verschiebungen duale Formulierung, bei der die Minimierung bezüglich der Spannungen vorgenommen wird, wobei die Impulsbilanz und die Symmetrie des Spannungstensors als Nebenbedingungen eingehen. Für diese, auch als Hellinger-Reissner-Prinzip bezeichnete, Variationsformulierung wurden in den vergangenen 30 Jahren zahlreiche Finite-Element-Kombinationen gefunden, welche die für die Stabilität eines solchen Sattelpunktproblems essentielle inf-sup-Bedingung erfüllen (eine Übersicht über die gebräuchlichsten ist in Kapitel 9 in [6] zu finden). Dazu muss die weiter oben erwähnte Verwendung der Raviart-Thomas-Elemente niedrigster Ordnung jedoch noch mit speziellen divergenzfreien ``Bubble-Funktionen'' angereichert werden, was (im zweidimensionalen Fall) auf [2] zurückgeht. Die auf diese Weise gewonnene direkte Approximation des Spannungstensors besitzt unter anderem die folgenden vorteilhaften Eigenschaften: Bei passender Wahl der Finite-Element-Kombinationen ist die Impulsbilanz elementweise exakt erfüllt und die Approximationsqualität bleibt auch für inkompressible Materialien erhalten. Ob dies die erhöhte Anzahl von Freiheitsgraden und den damit verbundenen größeren Bedarf an Rechenzeit und Speicher, insbesondere bei der Lösung der resultierenden Gleichungssysteme, rechtfertigt, muss im Einzelfall entschieden werden. Eine weitere Hürde beim Einsatz von flächen- und kantenbasierten Finite-Element-Ansätzen ist die Tatsache, dass nicht auf die üblichen, auf knotenbasierten Freiheitsgraden aufgebauten, Software-Komponenten zurückgegriffen werden kann. Zumindest in den mathematiknahen Programmpaketen für Finite-Element-Methoden sind flächen- und kantenbasierte Elemente aber in zunehmendem Maße bereits enthalten (siehe [10] für FEniCS).

Idealerweise liefert ein solcher Finite-Element-Ansatzraum approximative Spannungstensoren, welche die Impulserhaltung elementweise erfüllen und darüberhinaus auch noch symmetrisch sind. Auf Dreieckszerlegungen in zwei Raumdimensionen wurde ein solcher Ansatz erstmals in [3] beschrieben, dieser ist stückweise durch kubische Polynome gegeben und enthält alleine für die Spannungen 24 Freiheitsgrade pro Element, hinzu kommen noch 6 für die stückweise linearen Verschiebungen. Der entsprechende Ansatz auf Tetraederzerlegungen in drei Dimensonen besteht dann stückweise aus Polynomen vom Grad 4 und benötigt 162 Freiheitsgrade für den Spannungstensor plus 12 für die (wiederum stückweise linearen)Verschiebungen (siehe [1]). Für den Einsatz in der Finite-Element-Praxis sind diese Ansätze schon aufgrund des immensen Aufwandes bei der Assemblierung (ganz zu schweigen von der Implementierung) eher ungeeignet. Im Nachgang wurde aber ein ganzer Zoo neuer Elemente zur Spannungsapproximation von verschiedenen Autoren entwickelt, bei denen die Bedingungen zur Impulser-

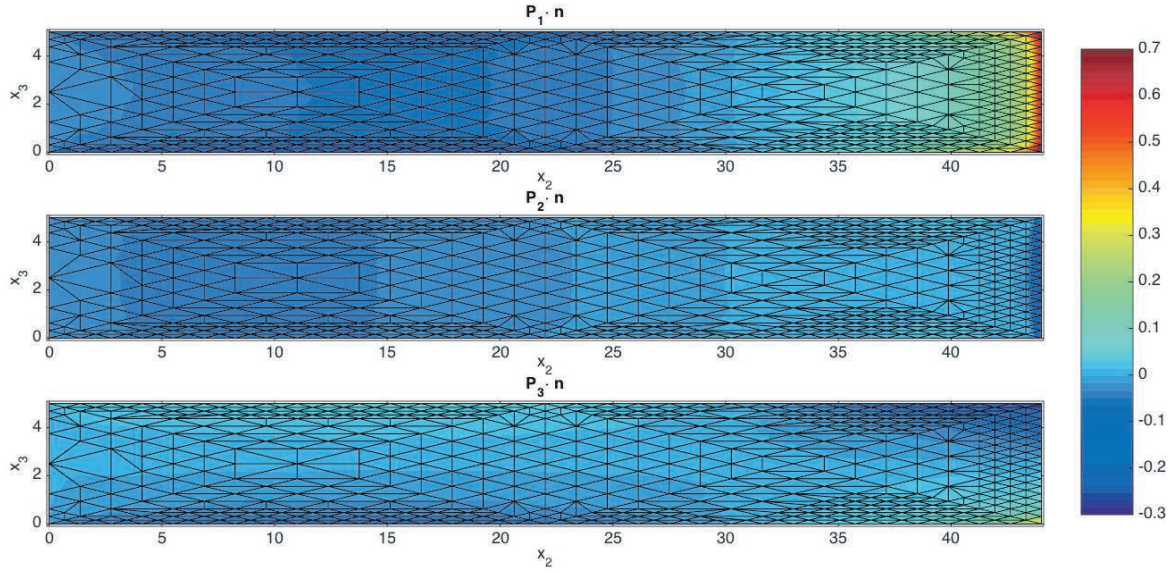


Abbildung 4: Oberflächenkräfte an einem dreidimensionalen elastisch verformten Körper.

haltung und/oder Symmetrie abgeschwächt werden und deren Aufwand vertretbar erscheint. Einige dieser Ansätze sind (für den zweidimensionalen Fall) in dem ausführlichen Vergleich in [8] enthalten.

Als Alternative zur näherungsweisen Lösung des dualen Problems mittels Finite-Element-Räumen in H(div) für die Spannungen lassen sich diese auch aus den berechneten Verschiebungen, bzw. im inkompressiblen Regime dem zusätzlich eingeführten Druck, rekonstruieren. Auch diesbezüglich wurden in den letzten zehn Jahren wesentliche Fortschritte erzielt und effiziente Algorithmen entwickelt, die auf lokalen Operationen beruhen. Solche Methoden zur Spannungsrekonstruktion sind inzwischen aus mathematischer Sicht recht gut verstanden (siehe [9] und die darin enthaltenen Literaturstellen). Diese Vorgehensweise bietet sich vor allem an bei mathematischen Modellen, die sich in einfacher Weise bezüglich der Verschiebungsvariablen ausdrücken lassen. Bei anderen Problemstellungen kann es vorteilhaft sein, die Spannungen von vornherein in die Diskretisierung miteinzubeziehen, weil sie einen zentralen Bestandteil des modellierten physikalischen Prozesses darstellen. Elastoplastische Verformungsvorgänge werden beispielsweise wesentlich von den Spannungszuständen beeinflusst. Eine weiterer Anwendungsbereich in dieser Richtung ist durch reibungsbehaftete Kontaktprozesse gegeben, bei denen die Oberflächenkräfte in Normal- und Tangentialrichtung bzw. das Verhältnis dieser beiden, an der Kontaktfläche ausschlaggebend sind.

Eine Herangehensweise, die gewissermaßen zwischen der primalen und der dualen Variationsformulierung angesiedelt ist, besteht in der Methode der „First-order system least squares“, die wir in Ermangelung eines passenderen deutschen Begriffs als Finite-Element-Ausgleichsformulierung bezeichnen möchten. Hierbei werden die beiden zugrundeliegenden Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Impulserhaltung bzw. das Materialgesetz beschreiben, gleichberechtigt nebeneinander geschrieben und im Quadratmittel über dem betrachteten Gebiet minimiert. Die Approximationsordnung ist (bei Verwendung der gleichen Ansatzräume) für die Verschiebungen identisch mit derjenigen der primalen Formulierung und für die Spannungen in H(div) stimmt diese mit der bei der dualen Formulierung erreichbaren überein (siehe [5] bzw. speziell für das lineare Elastizitätsmodell [7]). Auch ist man bei dieser Methode nicht durch eine zu erfüllende Kompatibilitätsbedingung (inf-sup-Stabilität) eingeschränkt. Allerdings muss man bei der Gewichtung der beiden Komponenten des Systems erster Ordnung Vorsicht walten lassen, damit diese aus vergleichbaren physikalischen Größen bestehen. Dies lässt sich durch eine Dimensionsanalyse oder entsprechende Entdimensionalisierung der Gleichungen erreichen, birgt aber natürlich die Gefahr, dass man bei unsachgemäßer Handhabung der Methode „Äpfel mit Birnen“ vergleicht. Diese Problematik wird bei der primalen und dualen Formulierung prinzipiell vermieden, da dort jeweils eine der beiden Gleichungen erster Ordnung als Optimalitätsbedingung auftritt und die andere als Nebenbedingung (nahezu) exakt erfüllt wird.

Die Auswertung des Ausgleichsfunktionals, auf der Grundlage eines adäquat gewichteten Systems erster Ordnung, liefert einem darüberhinaus ohne weiteres Hinzutun einen a posteriori Fehlerschätzer. Dies bedeutet, dass das Ausgleichsfunktional global den Approximationsfehler kontrolliert (Zuverlässigkeit) und lokal durch diesen nach oben abgeschätzt werden kann (Effizienz). Auf der lokalen Auswertung des Ausgleichs-

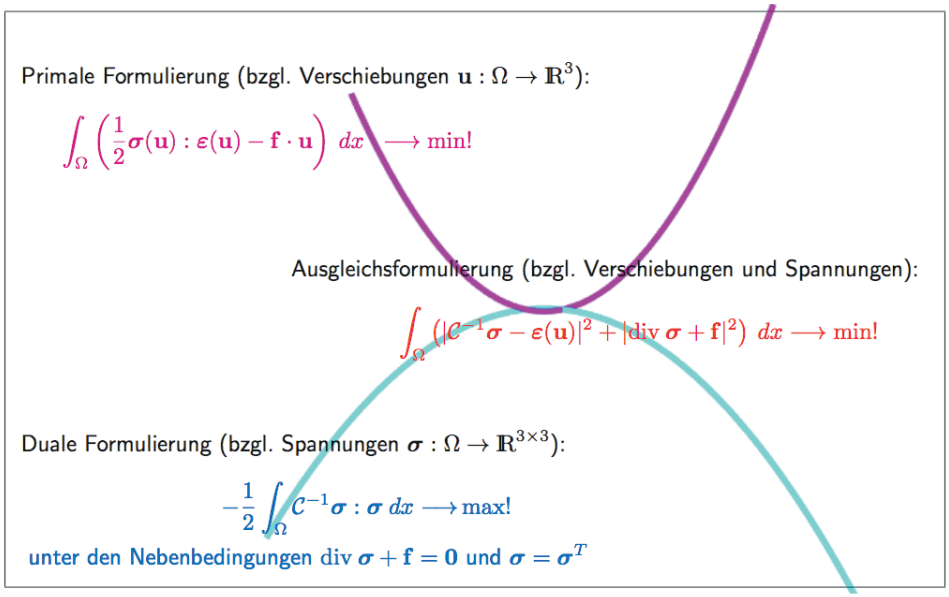


Abbildung 5: Beziehung zwischen primaler, dualer und Ausgleichsformulierung.

funktionals basierende adaptive Verfeinerungsstrategien führen dann zu sehr genauen Finite-Element-Approximationen bei relativ moderater Anzahl von Freiheitsgraden (siehe [7]). Dies gilt vor allem auch bei anspruchsvollen nichtlinearen Problemen der Festkörpermechanik wie elastoplastischen Deformationen (siehe [14]). In Abbildung 2 ist für das Benchmark-Testproblem der elastoplastischen Lochplatte aus [15] das Ergebnis einer numerischen Testrechnung auf der Basis der Finite-Element-Ausgleichsformulierung gezeigt. Oben und unten werden dabei Kräfte angelegt und schrittweise erhöht, welche die Platte in dieser Richtung auseinanderziehen, bis schliesslich plastische Verformungen einsetzen. Der gelbe Bereich (im oberen rechten Viertel dargestellt) kennzeichnet den Bereich, in dem die deviatorischen Spannungen die zulässige Obergrenze erreichen und die Verformung plastisch wird. Die durch die lokale Auswertung des Ausgleichsfunktional generierte adaptiv verfeinerte Triangulierung (in den restlichen drei Vierteln dargestellt) ist offenbar vor allem am Rand der plastischen Zone sehr fein.

Die Eigenschaft des Ausgleichsfunktionals als lokaler a posteriori Fehlerschätzer ist dabei allerdings unabhängig von der zugrundeliegenden Variationsformulierung. Wie bereits in [4] festgestellt und ausgenutzt wurde, lässt sich dazu jede beliebige konforme Finite-Element-Approximation für Verschiebungen und Spannungen in das Ausgleichsfunktional einsetzen und auswerten. Insbesondere lassen sich hierfür auch die oben angesprochenen Spannungs-Rekonstruktionen verwenden. Auf diesem Prinzip werden bereits seit mehreren Jahrzehnten a posteriori Fehlerschätzer hergeleitet (siehe wiederum [9] für eine Übersicht). Die Grundidee lässt sich sogar bis ins Jahr 1947 zurückverfolgen, wo es in [12] heisst:

„The theory developed in the present paper applies to any elastic body (in general anisotropic) possessing a positive-definite strain-energy function, quadratic in the components of stress. This function provides us with a metric in a function space in which the point or vector represents a state of stress. The geometry of the function space follows Euclidean analogies closely, and is powerful in suggesting methods of approximation. The aim is to obtain approximate solutions of elastic boundary value problems with errors which are calculable, the error being measured in terms of distance in function space, or, equivalently, in terms of strain-energy."

Interessanterweise war also diese Idee der Fehlerschätzung bereits von Beginn an durch die Festkörpermechanik motiviert.

Von Anfang an war die Verwendung der Finite-Element-Ausgleichsformulierung auch maßgeblich dadurch motiviert, dass für die bei der Diskretisierung entstehenden Gleichungssysteme Standard-Methoden eingesetzt werden können. Im Gegensatz zu den bei der Diskretisierung der dualen Formulierung entstehenden Sattelpunktprobleme sind die aus der Finite-Element-Ausgleichsformulierung herrührenden Matrizen nämlich positiv definit. Diese positive Definitheit ist darüberhinaus gleichmäßig bezüglich der zugrundeliegenden Normen (H(div) für die Spannungs- und H1 für die Verschiebungskomponenten). Für die iterative Lösung mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten bedeutet dies, dass sich eine von der Gitterfeinheit unabhängige Anzahl von Schritten erreichen läßt, wenn man Vorkonditionierer einsetzt, welche die durch diese Normen gegebene Struktur adäquat berücksichtigen.

Auch hinsichtlich der numerischen Behandlung der aus der Diskretisierung resultierenden algebraischen Ausgleichsprobleme, die im Falle nichtlinearer Differential-

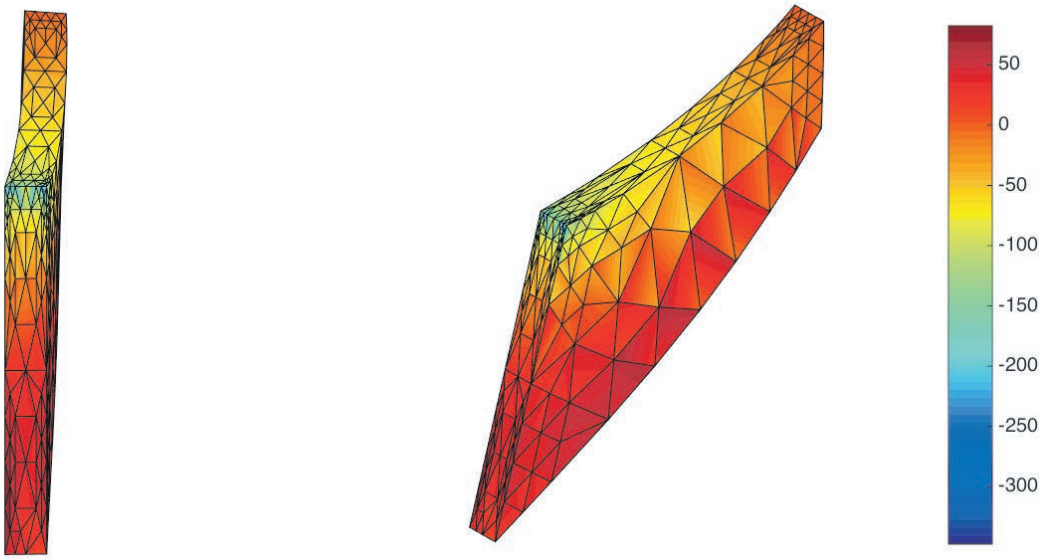


Abbildung 6: Normalspannungskomponente in x1-Richtung für ein transversal-isotropes Material.

gleichungen ebenfalls nichtlinear sind, ergeben sich algorithmische Vereinfachungen. Durch die Linearisierung des zugrundeliegenden nichtlinearen Systems erster Ordnung um eine aktuelle Näherung ergibt sich ein lineares Ausgleichsproblem, welches sich mit den oben beschriebenen Methoden lösen läßt. Diese als Gauß-Newton-Verfahren bezeichnete Vorgehensweise ist konzeptionell wesentlich einfacher als die Behandlung der Optimalitätsbedingung mit dem herkömmlichen Newton-Verfahren. Ausserdem hat man während des Iterationsprozesses ständig Zugriff auf die drei verschiedenen Fehleranteile, die die Genauigkeit bezüglich der linearen Ausgleichsprobleme in jedem Gauß-Newton-Schritt, des algebraischen nichtlinearen Ausgleichsproblems sowie des kontinuierlichen Systems erster Ordnung beschreiben. Dadurch kann man die entsprechenden Abbruchkriterien aufeinander anpassen und vermeidet die unnötige Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems auf einer Diskretisierungsstufe mit einer Genauigkeit, welche diejenige des Diskretisierungsfehlers deutlich unterschreitet. Dabei ist wieder die in [4] festgestellte Eigenschaft des Ausgleichsfunktionals, den Approximationsfehler einer beliebigen Näherung zuverlässig und effizient zu schätzen, von zentraler Bedeutung. Die lokale Auswertung des Ausgleichsfunktionals der aktuellen Näherung enthält somit alle drei oben beschriebenen Fehlerkomponenten. Die nichtlinearen und linearen algebraischen Fehleranteile kann man auf der Basis der nichtlinearen bzw. linearen Residuen der jeweiligen Gleichungssysteme schätzen.

Schließlich hat die Struktur der nichtlinearen Ausgleichsformulierung als Minimierungsaufgabe auch Vorteile hinsichtlich der Globalisierung des Iterationsprozesses. Auf der Basis der erzielten Reduktion des Funktionals lassen sich „back-tracking“ oder „trust-region“ Varianten der Gauß-Newton-Iteration umsetzen. Auch auf Problemstellungen mit nichtglatten Bereichen wie bei den Plastizitätsmodellen in [14] läßt sich diese Methodik problemlos anwenden.

Die Finite-Element-Ausgleichsformulierung wurde in [11] auf den Fall finiter elastischer Deformationen mit einem isotropen Neo-Hooke Materialgesetz erweitert. Dies erfordert die Invertierung der Spannungs-Verzerrungs-Abhängigkeit und liefert dann wiederum robuste Approximationseigenschaften für inkompressible Materialien. Auch bei großen Deformationen sind gute Spannungsapproximationen von Interesse, beispielsweise wenn man daraus Oberflächenkräfte gewinnen möchte. Dazu betrachte man den in Abbildung 3 dargestellten dreidimensionalen Körper, der am linken Rand (x2-x3-Koordinatenebene) fest angeklebt ist. Eine am rechten Rand aufgebrachte, nach oben (positive x2-Richtung) wirkende Kraft hat die in Abbildung 4 dargestellte Verteilung der Oberflächenkräfte (Normalkomponenten der Spannung) in den einzelnen Koordinatenrichtungen zur Folge. Die adaptiv verfeinerte Triangulierung, die wiederum aus der lokalen Auswertung des Ausgleichsfunktionals gewonnen wurde, passt sich wieder automatisch den erhöhten Anforderungen, etwa in der Nähe von Kantensingularitäten, an.

Die x1-Komponente der Normalspannung ist auch in Abbildung 5 zu sehen, diesmal für ein transversal-isotropes Materialgesetz mit einer ausgezeichneten Richtung, welche hier quer durch den Körper führt. Mit solchen Modellen lassen sich Werkstoffe und auch biologisches Gewebe beschreiben, bei denen Fasern auf eine anisotrope Struktur führen. Der Körper krümmt sich daher auch bei Belastung durch eine Kraft, die parallel zur x3-Richtung führt, aus der x3-Ebene heraus. Auch hier führt die Verwendung des Ausgleichsfunktionals zu adaptiv verfeinerten Triangulierungen, die sich den auftretenden Kantensingularitäten automatisch anpassen.

Gerade für die Simulation von Prozessen mit finiten Deformationen mit ihren hohen Anforderungen wurden in den zurückliegenden Jahrzehnten immer wieder neue Finite-Element-Ansätze entwickelt, die teilweise auch Einzug in die Ingenieurs-Praxis gehalten haben. Wichtig ist hierbei die Überprüfung der Eigenschaften des jeweiligen Ansatzes anhand möglichst einfacher Testbeispiele, welche den zu erwartenden Schwierigkeiten

der Simulation gerecht werden. In diesem Zusammenhang ist es angebracht, auch neue unkonventionelle Herangehensweisen zu analysieren und zu erproben. Als Beispiel sei hier die Approximation der Minoren des Deformationstensors in Form einer gemischten Finite-Element-Methode in [13] genannt, die sich im Rahmen hyperelastischer Modelle anbietet und vielversprechende Eigenschaften besitzt. Unter anderem solche neuartigen Ansätze werden im Rahmen des zu Beginn diesen Jahres angelaufenen Schwerpunktprogramms 1748 der DFG unter dem Thema „Zuverlässige Simulationstechniken in der Festkörpermechanik“ (https://www.uni-due.de/spp1748/) entwickelt und untersucht. Dabei soll durch die Zusammenarbeit von Ingenieuren und Mathematikern das Verständnis verschiedener Diskretisierungsverfahren in der Festkörpermechanik erweitert werden und neue Ansätze analysiert und erprobt werden.

In den weiteren Projekte dieser ersten bis Ende 2017 laufenden Phase des Schwerpunktprogramms werden unter anderem anisotrope Elastizitätsmodelle, Plastizität sowie Schädigungsprozesse von Werkstoffen untersucht. Weitere betrachtete Anwendungsbereiche liegen im Bereich der Simulation der Evolution von Diskontinuitäten bei der Rissausbreitung, Kontaktproblemen sowie additiver Herstellungsprozesse. Die zu diesem Zweck (weiter-)entwickelten Methoden beinhalten hybride diskontinuierliche Galerkin-Verfahren, Approximationstechniken für Funktionen mit beschränkter Variation, isogeometrische Diskretisierungen und Phasenfeld-Ansätze. In den meisten dieser Forschungsvorhaben werden diese Methoden mit adaptiven Gitterverfeinerungsstrategien kombiniert. Eines der Ziele dieses Schwerpunktprogramms ist der umfassende Vergleich all dieser Simulationstechniken anhand aussagekräftiger Benchmark-Testprobleme in ähnlicher Weise, wie dies seinerzeit in [15] für Plastizitätsmodelle erfolgte. Dabei ist die enge Kooperation von Wissenschaftlern aus den Bereichen Mechanik und Mathematik, die in den meisten Fällen bereits innerhalb der geförderten Projekte gegeben ist, entscheidend.

Literatur

[1] D.N. Arnold, G. Awanou, R. Winther, Finite elements for symmetric tensors in three dimensions, Math. Comp., 77, 1229-1251 (2008).

[2] D.N. Arnold, F. Brezzi, J. Douglas, PEERS: A new mixed finite element for plane elasticity, Japan J. Appl. Math., 1, 347-367 (1984).

[3] D.N. Arnold, R. Winther, Mixed finite elements for elasticity, Numer. Math., 92, 401-419 (2002).

[4] M. Berndt, T.A. Manteuffel, S.F. McCormick, Local error estimates and adaptive refinement for first-order system least squares, Electr. Trans. Numer. Anal., 6, 35-43 (1997).

[5] P. Bochev, M. Gunzburger, Least-Squares Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 2009.

[6] D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin, Mixed Finite Element Methods and Applications, Springer-Verlag, Heidelberg, 2013.

[7] Z. Cai, G. Starke, Least squares methods for linear elasticity, SIAM J. Numer. Anal., 42, 826-842 (2004).

[8] C. Carstensen, M. Eigel, J. Gedicke, Computational competition of symmetric mixed FEM in linear elasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 200, 2903-2915 (2011).

[9] A. Hannukainen, R. Stenberg, M. Vohralik, A unified framework for a posteriori error estimation for the Stokes equation, Numer. Math., 122, 725-769 (2012).

[10] A. Logg, K.-A. Mardal, G. N. Wells, Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.

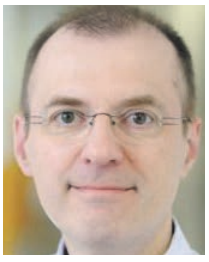
[11] B. Müller, G. Starke, A. Schwarz, J. Schröder, A first-order system least squares method for hyperelasticity, SIAM J. Sci. Comput., 36, B795-B816 (2014).

[12] W. Prager, J.L. Synge, Approximations in elasticity based on the concept of function space, Quart. Appl. Math., 5, 241-269 (1947).

[13] J. Schröder, P. Wriggers, D. Balzani, A new mixed finite element based on different approximations of the minors of deformation tensors, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 200, 3583-3600 (2011).

[14] G. Starke, An adaptive least-squares mixed finite element method for elasto-plasticity, SIAM J. Numer. Anal., 45, 371-388 (2007).

[15] E. Stein, P. Wriggers, A. Rieger, M. Schmidt, Benchmarks, in Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics, E.~Stein, ed., John Wiley and Sons, 2002, Kapitel 11, pp. 385-404.



Gerhard Starke, Prof. Dr. rer. nat., ist seit 2013 Professor für Numerische Mathematik an der Universität Duisburg-Essen. Zuvor war er von 2000-2013 auf einer C4-Professur für Wissenschaftliches Rechnen an der Universität Hannover und von 1997-2000 auf einer C3-Professur für Numerische Mathematik an der Universität Essen tätig. Sein Forschungsschwerpunkt ist die Weiterentwicklung von Finite-Element-Methoden und deren mathematische Analyse im Hinblick auf Anwendungen in der Festkörpermechanik. Er ist Mitinitiator des Schwerpunktprogrammes 1748 „Zuverlässige Simulationstechniken in der Festkörpermechanik“ der DFG..

Benjamin Müller, Dr. rer. nat., ist wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen in der Arbeitsgruppe „Numerische Mathematik“. Nach absolviertem Diplom an der Leibniz Universität Hannover im Bereich Numerik partieller Differentialgleichungen hat er in Hannover und Essen an seiner Promotion gearbeitet und diese 2015 an der Universität Duisburg-Essen mit Auszeichnung abgeschlossen. Der Kern seiner wissenschaftlichen Arbeit liegt in der Entwicklung und Analyse von Least Squares Finite-Element-Methoden in der nichtlinearen Festkörpermechanik. Seit Beginn dieses Jahres bearbeitet er ein Projekt im Rahmen des Schwerpunktprogrammes 1748 „Zuverlässige Simulationstechniken in der Festkörpermechanik“ der DFG.