Prof. Dr. Irwin Yousept Universität Duisburg-Essen

Numerik partieller Differentialgleichungen I

Typeset und Layout: Roman Händler
Fassung vom 28. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

In Numerik 2 haben wir numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in [a,b], \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

behandelt. Hierbei hängt die gesuchte Lösung y nur von einer Variablen $t \in [a,b]$ ab. Daher heißt die Aufgabe gewöhnliche Differentialgleichung. Bei partiellen Differentialgleichungen ist eine Funktion von mehreren Veränderlichen gesucht. Eine partielle Differentialgleichung ist also eine Differentialgleichung, die partielle Ableitungen enthält.

Definition 1.1 (Verwendung von Multiindizes)**.**

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein n-Tupel nichtnegativer Zahlen

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

heißt *Multiindex*. Der Betrag von α ist definiert durch

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex. Ist $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion, so definieren wir

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{und} \quad D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Beispiele 1.2.

(i) Es sei $u : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und $\alpha = (1, 2, 0, 0, 0)$. Dann ist

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} = D_1 D_2^2 u.$$

(ii) Es sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fünfmal stetig differenzierbar und $\alpha = (1,0,2)$ sowie $\beta = (0,1,1)$. Dann ist

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3^2}, \quad D^\beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}$$

und

$$D^\alpha D^\beta u = \frac{\partial^5 u}{\partial x_1 \partial x_3^2 \partial x_2 \partial x_3} \overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^5 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^3} = D^\gamma u$$

mit $\gamma = \alpha + \beta = (1,0,2) + (0,1,1) = (1,1,3)$.

(iii) Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (D_j u)_{j=1}^n,$$
$$\Delta u = \nabla \nabla u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = D_1^2 u + \ldots + D_n^2 u = \sum_{j=1}^n D_j^2 u.$$

Definition 1.3 (Partielle Differentialgleichung in n reellen Veränderlichen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Eine Gleichung der Form

$$F(x, u(x), D^{\alpha^1} u(x), D^{\alpha^2} u(x), \ldots, D^{\alpha^k} u(x)) = 0, \quad x \in \Omega,$$

heißt partielle Differentialgleichung in n reellen Veränderlichen. Dabei sind $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ Multiindizes der Dimension n.

(ii) Gilt $|\alpha^i| \leq m$ für alle $i = 1, \ldots, k$, und existiert ein Multiindex α^j mit $|\alpha^j| = m$, so heißt die partielle Differentialgleichung von m-ter Ordnung.

Beispiele 1.4.

(i) Die Gleichung

$$\Delta u = \sum_{j=1}^3 D_j^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(ii) Die Gleichung

$$x_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x) = 0, \quad x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2 < 1\},$$

ist äquivalent zu

$$x_1 (D_1 u)^2 + D_1 D_2^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Das entspricht

$$x_1(D^{\alpha^1}u)^2 + D^{\alpha^2}u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit $\alpha^1 = (1,0)$ und $\alpha^2 = (1,2)$. Diese Gleichung ist also eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung und die Funktion F ist definiert durch

$$F : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y_0, y_1, y_2) = x_1 y_1^2 + y_2.$$

Bemerkung 1.5. Partielle Differentialgleichungen spielen eine überaus wichtige Rolle in fast allen Teilgebieten der Physik, in den Ingenieurwissenschaften sowie in mathematischen Modellen der Wirtschaftswissenschaften. Im Folgenden betrachten wir einige wichtige Paradebeispiele für partielle Differentialgleichungen.

(i) Die Laplace- bzw. Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\Delta u = f.$$

(ii) Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

beschreibt die Wärmeausbreitung in Körpern.

(iii) Die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

beschreibt Schwingungs- und Schallausbreitungsphänomene.

(iv) Die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{cases} D_t - \nabla \times H = 0, \\ B_t + \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

beschreiben elektromagnetische Vorgänge.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen existiert keine allgemeine Theorie zur Existenz und Eindeutigkeit für partielle Differentialgleichungen

$$F(x, u(x), D^{\alpha^1}u(x), \ldots, D^{\alpha^k}u(x)) = 0.$$

Das Ziel der Vorlesung ist die Finite-Elemente-Analyse für die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f.$$

Die Finite-Elemente-Analyse liefert uns eine effiziente numerische Methode. Zunächst wollen wir uns mit einer Lösungstheorie für die Poisson-Gleichung beschäftigen. Hierzu studieren wir nur die schwache Theorie, da diese die Grundlage der modernen Analysis sowie der Finite-Elemente-Methode ist. Die klassische Theorie wollen wir nicht behandeln, denn diese ist für ein allgemeines Problem nicht anwendbar. Ein Beispiel dazu:

Gegeben sei eine beschränkte und offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sowie $f \in L^2(\Omega)$ (Messdaten). Wir suchen eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ der Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randdaten

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \quad u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Diese Aufgabe besitzt im Allgemeinen keine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, denn $f \in L^2(\Omega)$ muss nicht unbedingt stetig sein. Aber diese Aufgabe besitzt jedoch eine eindeutige schwache Lösung, die wir im Kapitel 3 untersuchen werden. Beachte, dass man für die schwache Theorie den Begriff der klassischen Ableitung, den wir aus Analysis 2 kennen, umfassend verallgemeinern muss:

$$\text{klassische Ableitung} \longrightarrow \text{schwache Ableitung.}$$

Diese Vorlesung beruht auf der folgenden Literatur:

[1] Robert A. Adams und John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Second. Bd. 140. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003, S. xiv+305. ISBN: 0-12-044143-8.

[2] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Bd. 40. Classics in Applied Mathematics. Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam; MR0520174 (58 #25001)]. Society for Industrial und Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002, S. xxviii+530. ISBN: 0-89871-514-8. DOI: 10.1137/1.9780898719208. URL: http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898719208.

[3] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. Bd. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, S. xviii+662. ISBN: 0-8218-0772-2.

[4] Pierre Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Bd. 69. Classics in Applied Mathematics. Reprint of the 1985 original [MR0775683], With a foreword by Susanne C. Brenner. Society for Industrial und Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2011, S. xx+410. ISBN: 978-1-611972-02-3. DOI: 10.1137/1.9781611972030.ch1. URL: http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611972030.ch1.

[5] J. Wloka. *Partial differential equations*. Translated from the German by C. B. Thomas and M. J. Thomas. Cambridge University Press, Cambridge, 1987, S. xii+518. ISBN: 0-521-25914-2; 0-521-27759-0. DOI: 10.1017/CBO9781139171755. URL: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139171755.

1.1. Vorbetrachtungen

Definition 1.6 (Norm)**.** Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm in V, falls gilt:

(i) $\|x\|_V \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \text{und} \quad \|x\|_V = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,$

(ii) $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V \quad \forall x, y \in V,$

(iii) $\|\lambda x\|_V = |\lambda| \|x\|_V \quad \forall x \in V \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Ist $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}$ eine Norm in V, so heißt $\{V, \|\cdot\|_V\}$ *(reeller) normierter Vektorraum.*

Definition 1.7. Es sei $\{V, \|\cdot\|_V\}$ ein reeller normierter Vektorraum und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ eine Folge in V. Existiert ein Element $x \in V$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_V = 0,$$

so heißt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent. In diesem Fall sagen wir, dass $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen $x \in V$ konvergiert und schreiben dafür

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;\text{ in }\; V \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_V = 0.$$

Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt Cauchy-Folge, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq k(\varepsilon) : \quad \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Bemerkung 1.8. Jede konvergente Folge eines normierten Vektorraums ist immer eine Cauchy-Folge. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Definition 1.9. Ein normierter Raum $\{V, \|\cdot\|_V\}$ heißt vollständig, wenn in V jede Cauchy-Folge konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum.*

Definition 1.10. Es sei H ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Abbildung

$$(\cdot, \cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$$

heißt *Skalarprodukt* in H, falls gilt:

(i) $(y, y)_H \geq 0 \quad \forall y \in H \quad \text{und} \quad (y, y)_H = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0,$

(ii) $(y, w)_H = (w, y)_H \quad \forall y, w \in H,$

(iii) $(y_1 + y_2, w)_H = (y_1, w)_H + (y_2, w)_H \quad \forall y_1, y_2, w \in H,$

(iv) $(\lambda y, w)_H = \lambda (y, w)_H \quad \forall y, w \in H \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Ist $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt in H, so heißt $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ *Prä-Hilbertraum*.

Bemerkung 1.11. Jeder Prä-Hilbertraum $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ ist ein normierter Raum, denn die Abbildung

$$\|\cdot\|_H : H \to \mathbb{R}, \quad \|y\|_H := \sqrt{(y,y)_H},$$

definiert eine Norm in H.
In jedem Prä-Hilbertraum gilt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|(y,w)_H| \leq \|y\|_H + \|w\|_H \quad \forall y,w \in H.$$

Definition 1.12. Ein Prä-Hilbertraum $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$, der mit der induzierten Norm

$$\|y\|_H := \sqrt{(y,y)_H}$$

vollständig ist, heißt *Hilbertraum*.

Kapitel 2

Sobolevraum

Der Sobolevraum dient als Basis für die moderne mathematische und numerische Analysis.

2.1. L^p-Räume

Definition 2.1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in [1, \infty)$. Unter $L^p(\Omega)$ versteht man den Raum aller Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\int_\Omega |y(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Die L^p-Norm ist wie folgt definiert:

$$\|y\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |y(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall y \in L^p(\Omega).$$

Dabei werden Funktionen in $L^p(\Omega)$, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden, als gleich angesehen. Sie gehören der gleichen Äquivalenzklasse an.

Definition 2.2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller fast überall gleichmäßig beschränkten und messbaren Funktionen $y : \Omega \to \mathbb{R}$. Der Raum $L^\infty(\Omega)$ ist ausgestattet mit der Norm

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{\substack{|E|=0 \\ E \subset \Omega}} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus E} |y(x)| \right) =: \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |y(x)|,$$

wobei

$$\int_E 1 \, \mathrm{d}x =: |E|.$$

Beispiel 2.3. Betrachte die Funktion

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Hierfür gilt
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |y(x)| = 0, \quad \max_{x\in\mathbb{R}} |y(x)| = 1.$$
Mit anderen Worten ist $\|y\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$.

Definition 2.4. Es sei $p \in [1,\infty]$. Der zu p konjugierte Exponent $p' \in [1,\infty]$ ist definiert wie folgt:
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$
Es gilt also:
$$\begin{aligned} p &= 1 && \Rightarrow \quad p' = \infty,\\ p &= \infty && \Rightarrow \quad p' = 1,\\ p &\in (1,\infty) && \Rightarrow \quad p' = \frac{p}{p-1} \in (1,\infty). \end{aligned}$$

Lemma 2.5 (Youngsche Ungleichung)**.** *Seien $a,b \geq 0$ und $p \in (1,\infty)$ ein Exponent. Dann gilt*
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$
mit Gleichheit genau dann, wenn $a^p = b^{p'}$ gilt.

Folgerung 2.6. Es gilt
$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2} \quad \forall a,b \geq 0 \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Beweis. Die Exponentialfunktion
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
ist strikt konvex und somit gilt
$$\exp((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)\exp(A) + \lambda \exp(B) \quad \forall A,B \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ \lambda \in (0,1)$$
mit Gleichheit genau dann, wenn $A = B$ gilt. Wir setzen
$$\lambda = \frac{1}{p'} \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda) = 1 - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p}$$
sowie
$$A = \ln(a^p), \quad B = \ln(b^{p'}).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} ab = \exp(\ln(a) + \ln(b)) &= \exp\left(\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{p'}\ln(b^{p'})\right) \\ &= \exp((1-\lambda)A + \lambda B) \\ &\le (1-\lambda)\exp(A) + \lambda\exp(B) \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a^p = b^{p'}.$$

$\square$

Lemma 2.7 (Höldersche Ungleichung). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty]$, $u \in L^p(\Omega)$ sowie $v \in L^{p'}(\Omega)$. Dann gilt*

$$uv \in L^1(\Omega) \quad \textit{und} \quad \int_\Omega |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Im Falle $p \in (1, \infty)$ gilt die Gleichheit genau dann, wenn

$$\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p = \left(\frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}}\right)^{p'}$$

für fast alle $x \in \Omega$ gilt.

Beweis. Für $p = 1$ oder $p = \infty$ ist die Aussage trivial. Die Aussage ist auch trivial, falls $u(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ oder $v(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt.

Es sei nun $p \in (1, \infty)$ und $u \not\equiv 0$ fast überall in Ω sowie $v \not\equiv 0$ fast überall in Ω. Wir setzen

$$a = \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \quad \text{und} \quad b = \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}}$$

in die Youngsche Ungleichung ein und erhalten

$$\frac{|u(x)||v(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}} = ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} = \frac{1}{p}\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}}\right)^{p'}$$

für fast alle $x \in \Omega$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|u(x)||v(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}}\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{p}\frac{1}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}\int_\Omega |u(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p'}\frac{1}{\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}}\int_\Omega |v(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$a^p = b^{p'} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p = \left(\frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}}\right)^{p'} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

□

Lemma 2.8 (Minkowski-Ungleichung). *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $p \in [1, \infty]$, *sowie* $u, v \in L^p(\Omega)$. *Dann gilt*

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis. Für $p = 1$ oder $p = \infty$ ist die Aussage trivial. Die Aussage ist auch trivial, falls $\|u+v\|_{L^p(\Omega)} = 0$ gilt.
Es sei nun $p \in (1, \infty)$ und $\|u+v\|_{L^p(\Omega)} > 0$. Wir setzen

$$w(x) := \left(\frac{|u(x)+v(x)|}{\|u+v\|_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{p}{p'}} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Dann ist $w \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^{p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |w(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\int_\Omega \left(\frac{|u(x)+v(x)|}{\|u+v\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\frac{\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\,\mathrm{d}x}{\|u+v\|^p_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{p'}} = 1.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\left(\frac{|w(x)|}{\|w\|_{L^{p'}(\Omega)}}\right)^{p'} = |w(x)|^{p'} = \left(\frac{|u(x)+v(x)|}{\|u+v\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Hieraus folgt (Gleichheit in der Hölder-Ungleichung):

$$\int_\Omega |(u(x)+v(x))w(x)|\,\mathrm{d}x = \|u+v\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|u+v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |(u(x)+v(x))w(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega |u(x)w(x)|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v(x)w(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Fazit 2.9.

Youngsche Ungleichung $\longrightarrow$ Hölder-Ungleichung $\longrightarrow$ Minkowski-Ungleichung.

Korollar 2.10. *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty]$ ist $\{L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\}$ ein normierter Raum.*

Satz 2.11. *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty]$ ist $\{L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\}$ vollständig. Das heißt, $\{L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\}$ ist ein Banachraum.*

Bemerkung 2.12. Für $p \in (0, 1)$ ist $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ keine Norm.

Satz 2.13 (Einbettungsresultat für $L^p(\Omega)$-Räume). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Letzteres bedeutet*

$$|\Omega| = \int_\Omega 1 \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Sei $u \in L^q(\Omega)$ mit $q \in [1, \infty]$. Dann ist

$$\begin{cases} u \in L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq p \leq q, \\ \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}. \end{cases}$$

(ii) Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\lim_{p \to \infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{p \to \infty} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

(iii) Es sei $u \in L^p(\Omega)$ für alle $p \in [1, \infty)$ und es gebe eine Konstante $K > 0$, so dass gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K \quad \forall p \in [1, \infty).$$

Dann gilt

$$u \in L^\infty(\Omega) \quad \text{und} \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K.$$

Bemerkung 2.14. Die Aussage ist im Allgemeinen für unbeschränkte Mengen Ω falsch. Ein einfaches Gegenbeispiel dazu:
Die Funktion

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u \equiv 1,$$

liegt in $L^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1,$$

aber $u \notin L^p(\mathbb{R})$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Beweis.

(i) Ist $q = \infty$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\int_\Omega (\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega \|u\|^p_{L^\infty(\Omega)} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\infty}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. Die Aussage ist auch trivial für $p = q \in [1, \infty]$. Sei nun $1 \le p < q < \infty$. Aus $u \in L^q(\Omega)$ folgt

$$\infty > \int_\Omega |u(x)|^q \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (|u(x)|^p)^{\frac{q}{p}} \,\mathrm{d}x.$$

Also ist $|u(x)|^p \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u(x)|^p 1 \,\mathrm{d}x &\le \||u(x)|^p\|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)} \|1\|_{L^{(\frac{q}{p})'}(\Omega)} \\ &= \left(\int_\Omega (|u(x)|^p)^{\frac{q}{p}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{(\frac{q}{p})'}} \\ &= |\Omega|^{1-\frac{p}{q}} \|u\|^p_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \le |\Omega|^{1-\frac{p}{q}} \|u\|^p_{L^q(\Omega)}.$$

Das Ziehen der p-ten Wurzel liefert dann

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

(ii) Aus (i) folgt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall p \in [1, \infty].$$

Daher erhalten wir

$$\limsup_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Laut Definition gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \Omega_\varepsilon \subset \Omega \text{ mit } |\Omega_\varepsilon| \ne 0 : |u(x)| \ge \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| - \varepsilon \text{ für fast alle } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Folglich gilt

$$\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \geq \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon\right)^p \,\mathrm{d}x$$
$$= |\Omega_\varepsilon| \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon\right)^p.$$

Wir erhalten

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \geq |\Omega_\varepsilon| \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon\right)^p,$$

also

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \geq |\Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{p}} \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon\right).$$

Daher ist

$$\liminf_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Insgesamt gilt

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \limsup_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

(iii) Annahme: Es gäbe ein $K_1 > K$ und eine Menge $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $|\Omega_1| \neq 0$, so dass gelte

$$|u(x)| \geq K_1 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega_1.$$

Folglich gilt für alle $p \in [1, \infty)$:

$$\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \geq \int_{\Omega_1} |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \geq \int_{\Omega_1} K_1^p \,\mathrm{d}x = |\Omega_1| K_1^p.$$

Also gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \geq |\Omega_1|^{\frac{1}{p}} K_1$$

und somit

$$\liminf_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \geq K_1.$$

Andererseits gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K \quad \forall p \in [1, \infty),$$

also

$$\liminf_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K.$$

Insgesamt erhalten wir den Widerspruch

$$K < K_1 \leq \liminf_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K.$$

$\square$

Dieser Satz zeigt also die stetige Einbettung $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ für eine beschränkte und offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ im folgenden Sinne:

Definition 2.15. Seien X, Y normierte Räume. Dann ist X in Y stetig eingebettet (Notation $X \hookrightarrow Y$), falls gilt:

(i) $X \subset Y$ ist ein Unterraum.

(ii) Die Identitätsabbildung

$$\mathrm{Id} : X \to Y, \quad \mathrm{Id}\, x = x \in X \subset Y,$$

ist stetig.

Da die Identitätsabbildung $\mathrm{Id} : X \to Y$ linear ist, ist (ii) äquivalent zu:

$$\exists C > 0 : \forall x \in X : \|x\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Fazit 2.16. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so gilt

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Definition 2.17. Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist U in Ω kompakt enthalten, falls gilt

$$\overline{U} \text{ ist kompakt und } \overline{U} \subset \Omega.$$

Notation: $U \subset\subset \Omega$.

Definition 2.18. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Mit $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller lokal integrierbaren Funktionen:

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ messbar} : \int_U |f| \,\mathrm{d}x < \infty \quad \forall U \subset\subset \Omega \right\}.$$

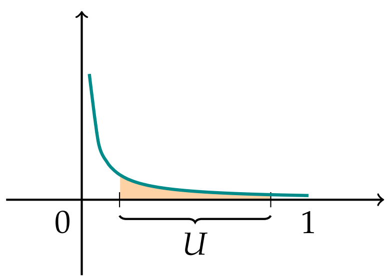
Korollar 2.19. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in [1, \infty]$. Dann gilt*

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Beweis. Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty]$. Ferner sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U \subset\subset \Omega$ ($\overline{U}$ ist kompakt und $\overline{U} \subset \Omega$). Dann ist $f \in L^1(U)$ laut $L^q(U) \hookrightarrow L^1(U)$ für alle $1 \leq q \leq \infty$ (U beschränkt). □

Beispiel 2.20. Es sei $\Omega = (0, 1)$ und

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tfrac{1}{x}.$$



Dann ist $f \notin L^1(0,1)$, denn

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \infty,$$

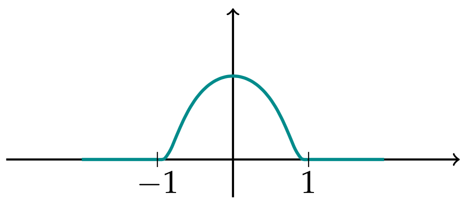
aber $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$.

2.2. Distributionen (Laurent Schwartz, 1915 - 2002)

Definition 2.21 (Träger)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Träger einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert durch
$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$
Der Träger ist also die kleinste abgeschlossene Menge, außerhalb der f verschwindet.

Beispiele 2.22.

(i) Es sei $\Omega = (0,1)$ und wir betrachten die Funktion
$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$
Dann ist $\operatorname{supp}(f) = [0,1]$.

(ii) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$


Hier ist
$$f(x) \neq 0 \quad \forall x : |x| < 1,$$
also $\operatorname{supp}(f) = [-1,1]$.

Definition 2.23. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir definieren
$$C^k(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : k\text{-mal stetig differenzierbar im klassischen Sinne}\},$$
$$C_0^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt und } \operatorname{supp}(f) \subset \Omega\}.$$

Beispiel 2.24. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$
ist $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Definition 2.25 (Konvergenzbegriff in $C_0^\infty(\Omega)$)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$, und $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir sagen, dass die Folge $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ in $C_0^\infty(\Omega)$ gegen f konvergiert, falls gilt:

(i) Es gibt eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit
$$\begin{cases} \operatorname{supp}(f) \subset K, \\ \operatorname{supp}(f_j) \subset K \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) Für alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha f_j - D^\alpha f\|_{C(K)} = 0.$$

Hierfür schreiben wir

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \quad \text{in} \quad C_0^\infty(\Omega).$$

Definition 2.26. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$C(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}, \quad C^k(\overline{\Omega}) := \{f \in C^k(\Omega) : D^\alpha f \in C(\overline{\Omega}) \ \ \forall |\alpha| \le k\},$$

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} := \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|, \quad \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{x\in\overline{\Omega}} \left(\sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha f(x)| \right).$$

Die Räume $\{C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})}\}$ und $\{C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}\}$ sind Banachräume.

Definition 2.27. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung

$$T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$$

heißt *Distribution* auf Ω, falls gilt:

(i) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist linear, das heißt, es gilt

$$T(\lambda\varphi + \theta) = \lambda T(\varphi) + T(\theta) \quad \forall \varphi, \theta \in C_0^\infty(\Omega), \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(ii) $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich des Konvergenzbegriffs in $C_0^\infty(\Omega)$:
Aus

$$\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} f_j = f \ \ \text{in} \ \ C_0^\infty(\Omega)$$

folgt

$$\lim_{j\to\infty} |T(f_j) - T(f)| = 0.$$

Definition 2.28. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Mit $C_0^\infty(\Omega)^*$ bezeichnen wir den Raum aller Distributionen auf Ω:

$$C_0^\infty(\Omega)^* := \{T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ linear und stetig bzgl. des Konvergenzbegriffs in } C_0^\infty(\Omega)\}.$$

Bemerkung 2.29. In der Tradition von Laurent Schwartz verwendet man auch die Notation

$$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \quad D'(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)^*.$$

Es seien nun $T_1, T_2 \in C_0^\infty(\Omega)^*$ Distributionen auf Ω. Es gelten die folgenden elementaren Eigenschaften:

(i) Gleichheit:
$$T_1 = T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_1(\varphi) = T_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(ii) Addition zweier Distributionen:
Es seien $T_1, T_2 \in C_0^\infty(\Omega)^*$. Dann folgt $T_1 + T_2 \in C_0^\infty(\Omega)^*$ mit
$$(T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(iii) Multiplikation mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$(\lambda T_1)(\varphi) = \lambda T_1(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Beispiele 2.30.

(i) Die Null-Distribution
$$T(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(ii) Die Dirac-δ-Distribution: Sei $a \in \Omega$ fest. Dann ist
$$\delta_a : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(iii) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Wir definieren
$$T_f : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$
Für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$
denn $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ ist kompakt, und somit
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \|\varphi\|_{C(\operatorname{supp}(\varphi))} \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$
da $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt.

Definition 2.31. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Distribution $T \in C_0^\infty(\Omega)^*$ heißt *regulär*, falls es eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gibt mit
$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Lemma 2.32. *Die durch $f \mapsto T_f$ definierte Abbildung von $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ nach $C_0^\infty(\Omega)^*$ ist injektiv.*

Beweis. Die Abbildung

$$\Phi : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)^*, \quad \Phi(f) = T_f$$

ist offensichtlich linear. Somit ist Φ genau dann injektiv, falls $\text{Kern}(\Phi) = \{0\}$ gilt. Sei $f \in \text{Kern}(\Phi)$. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Daraus folgt dann $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$. □

Bemerkung 2.33.

(i) Im Beweis haben wir das sogenannte Fundamentallemma der Variationsgleichung angewendet:

Es sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und es gelte

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann gilt $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$.

(ii) Jede Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ kann also eindeutigerweise als eine reguläre Distribution T_f identifiziert werden, das heißt, $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)^*$.

(iii) Für alle Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt also insbesondere

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)^* \quad \forall p \in [1, \infty].$$

Lemma 2.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(\Omega)$ und $T \in C_0^\infty(\Omega)^*$. Dann wird durch*

$$(fT)(\varphi) := T(f \cdot \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

eine Distribution $fT \in C_0^\infty(\Omega)^*$ definiert.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $fT : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear und stetig bezüglich des Konvergenzbegriffs in $C_0^\infty(\Omega)$ ist.
Zur Linearität: Seien $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$fT(\lambda\varphi + \psi) = T(f(\lambda\varphi + \psi)) = T(\lambda f\varphi + f\psi) = \lambda T(f\varphi) + T(f\psi) = \lambda fT(\varphi) + fT(\psi).$$

Zur Stetigkeit: Sei $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\lim_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$ in $C_0^\infty(\Omega)$. Mit anderen Worten:
Es existiert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$, so dass

$$\begin{cases} \text{supp}(\varphi) \subset K, \\ \text{supp}(\varphi_j) \subset K \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

und für alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{C(K)} = 0. \tag{$*$}$$

Somit gilt

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(f\varphi) \subset K, \\ \operatorname{supp}(f\varphi_j) \subset K \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{$**$}$$

Andererseits gilt für jeden Multiindex $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$:

$$\begin{aligned} D^\beta(f\varphi_j - f\varphi) = D^\beta(f(\varphi_j - \varphi)) &= \sum_{0\le|\alpha|\le|\beta|} \binom{\beta}{\alpha} D^\alpha(\varphi_j - \varphi) D^{\beta-\alpha} f \\ &= \sum_{0\le|\alpha|\le|\beta|} c_\alpha D^\alpha(\varphi_j - \varphi) \end{aligned}$$

mit

$$c_\alpha = \binom{\beta}{\alpha} D^{\beta-\alpha} f \in C^\infty(\Omega).$$

Zusammen mit ($*$) gilt

$$\|D^\beta(f\varphi_j - f\varphi)\|_{C(K)} \le c\|D^\alpha(\varphi_j - \varphi)\|_{C(K)} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \;\; j \to \infty. \tag{$***$}$$

Aus ($**$)-($***$) folgt daher

$$\lim_{j\to\infty} f\varphi_j = f\varphi \;\; \text{in} \;\; C_0^\infty(\Omega).$$

Da T bezüglich des Konvergenzbegriffs in $C_0^\infty(\Omega)$ stetig ist, erhalten wir

$$(fT)(\varphi_j) = T(f \cdot \varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} T(f \cdot \varphi) = (fT)(\varphi) \;\; \text{in} \;\; \mathbb{R}.$$

Somit haben wir bewiesen, dass (fT) eine Distribution ist. □

Definition 2.35. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Folge von Distributionen $\{T_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)^*$ konvergiert gegen $T \in C_0^\infty(\Omega)^*$, falls gilt

$$\lim_{j\to\infty} |T_j(\varphi) - T(\varphi)| = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Schreibweise:

$$\lim_{j\to\infty} T_j = T \;\; \text{in} \;\; C_0^\infty(\Omega)^*.$$

Definition 2.36. Wir definieren die Glättungsfunktion (Mollifier) $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\eta_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \eta(y) = \begin{cases} c\exp\left(-\frac{1}{1-|y|^2}\right), & |y| < 1, \\ 0, & |y| \geq 1, \end{cases}$$

mit

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1} \in \mathbb{R}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt die Glättungsfunktion $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften:

(i) $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = \overline{B}(0,\varepsilon)$, mit $B(0,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - 0| < \varepsilon\}$.

(ii) $\eta_\varepsilon(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(iii) $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 2.37. Der Begriff „Mollifier“ geht zurück auf Kurt Otto Friedrichs (1901 - 1982) und spielt eine Schlüsselrolle in der Analyse der Sobolevräume.

Lemma 2.38. *Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} T_{\eta_\varepsilon} = \delta_0.$$

Mit anderen Worten konvergiert die von η_ε erzeugte Distribution gegen die Dirac'sche Delta-Distribution $\delta_0 \in C_0^\infty(\Omega)^*$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} |T_{\eta_\varepsilon}(\varphi) - \underbrace{\varphi(0)}_{=\delta_0(\varphi)}| = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt.
Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} |T_{\eta_\varepsilon}(\varphi) - \varphi(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x\varphi(0) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x}_{=1\ \forall \varepsilon > 0} \underbrace{\sup_{x \in \bar{B}(0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(0)|}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0} \\ &\longrightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

□

2.2.1. Distributionelle Ableitung

Vorbetrachtung: Es seien $f \in C^k(a,b)$ und $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$. Dann gilt nach partieller Integration:

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hieraus folgt

$$\int_a^b f^{(n)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_a^b f(x)\varphi^{(n)}\,\mathrm{d}x \quad \forall 1 \le n \le k.$$

Diese elementare Betrachtung ist die Grundlage für die distributionelle Ableitung.

Definition 2.39 (Distributionelle Ableitung/Ableitung von Distributionen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in C_0^\infty(\Omega)^*$ eine Distribution auf Ω. Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definieren wir die α-te distributionelle Ableitung $D^\alpha T \in C_0^\infty(\Omega)^*$ wie folgt:

$$D^\alpha T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\underbrace{D^\alpha \varphi}_{\text{klassisch}}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Bemerkung 2.40. Mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt auch $D^\alpha \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ für alle Multiindizes α. Damit ist $T(D^\alpha \varphi) \in \mathbb{R}$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nach Definition 2.27 ist $D^\alpha T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ in der Tat eine Distribution auf Ω, das heißt, $D^\alpha T \in C_0^\infty(\Omega)^*$.

Definition 2.41 (Distributionelle Ableitung von $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$-Funktionen)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist die α-te distributionelle Ableitung von f wie folgt definiert:

$$D^\alpha T_f \in C_0^\infty(\Omega)^*, \quad D^\alpha T_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(D^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit anderen Worten ist die distributionelle Ableitung von f nichts anderes als die Ableitung der von f erzeugten regulären Distribution:

$$\begin{array}{ccccc} f & \longmapsto & T_f & \longmapsto & D^\alpha T_f \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) & & C_0^\infty(\Omega)^* & & C_0^\infty(\Omega)^* \end{array}$$

mit

$$D^\alpha T_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Bemerkung 2.42. Insbesondere hat jede $L^p(\Omega)$-Funktion für alle Exponenten $1 \le p \le \infty$ distributionelle Ableitungen, denn es gilt

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Frage: Was ist nun die α-te distributionelle Ableitung einer $C^k(\Omega)$-Funktion?

Lemma 2.43. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| \leq k$. Dann gilt für die α-te distributionelle Ableitung von f:*

$$D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f} \quad (\cong D^\alpha f \text{ im obigen Sinne}).$$

Mit anderen Worten ist die α-te distributionelle Ableitung von f nichts anderes als die von $D^\alpha f$ erzeugte reguläre Distribution. Somit lässt sich die α-te distributionelle Ableitung von $f \in C^k(\Omega)$ eindeutig mit der klassischen Ableitung identifizieren, solange $|\alpha| \leq k$ gilt.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha T_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(D^\alpha \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \underbrace{D^\alpha \varphi(x)}_{\text{klassisch}} \,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{2|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha f(x) \varphi(x) \,\mathrm{d}x = T_{D^\alpha f}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.44. Der Begriff der distributionellen Ableitung verallgemeinert den Begriff der klassischen Ableitung (Analysis 2), denn:

(i) Jede $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$-Funktion, die nicht einmal stetig und integrierbar sein muss, hat stets eine distributionelle Ableitung für alle Multiindizes α.

(ii) Die α-te distributionelle Ableitung einer k-mal stetig differenzierbaren Funktion $f \in C^k(\Omega)$ lässt sich mit der klassischen Ableitung $D^\alpha f \in C^{k-|\alpha|}(\Omega)$ identifizeren, solange $|\alpha| \leq k$ gilt.

Beispiele 2.45.

(i) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $T = \delta_0 : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Dirac'sche δ-Distribution im Nullpunkt. Dann ist

$$\delta_0'(\varphi) = (-1)\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Daraus folgt

$$\delta_0^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

(ii) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Die Betragsfunktion ist nicht klassisch differenzierbar. Diese ist aber lokal integrierbar und besitzt somit distributionelle Ableitungen. Laut Definition 2.41 ist diese gegeben durch

$$T_f' : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad T_f'(\varphi) = (-1) T_f(\varphi') \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

wobei

$$\begin{aligned}T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} x\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} (-x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} x\phi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} x\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Also gilt

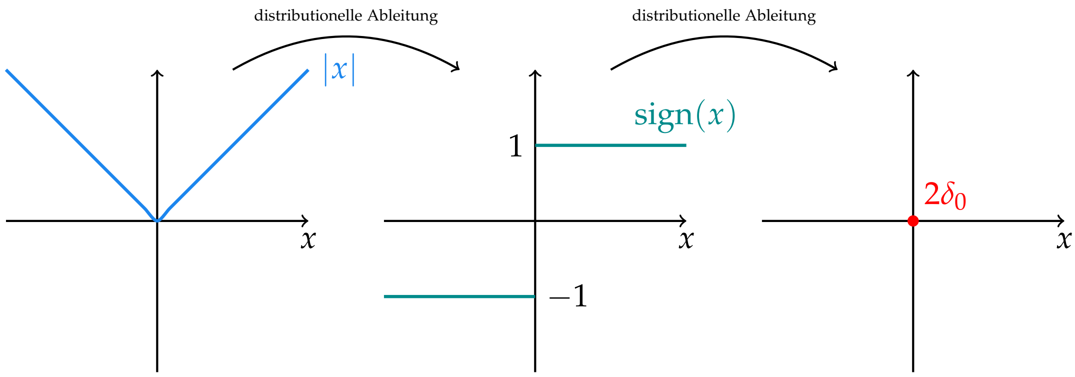
$$\begin{aligned}T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') &= -\int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -x\varphi(x)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= T_{\operatorname{sign}}(\varphi)\end{aligned}$$

mit

$$\operatorname{sign}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Also ist

$$T_f' = T_{\operatorname{sign}} \quad (\cong \operatorname{sign}).$$



(iii) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und wir wollen die distributionellen Ableitungen von $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ berechnen. Beachte, dass $\operatorname{sign} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ gilt, sodass $T'_{\operatorname{sign}} \in C_0^\infty(\mathbb{R})^*$ existiert. Zunächst berechnen wir die distributionelle Ableitung der Heaviside-Funktion

$$H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}T_H'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\infty} 1\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} \\ &= \varphi(0) = \delta_0(\varphi)\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Somit gilt $T_H' = \delta_0$. Da aber sign $= 2H - 1$ gilt, folgt

$$T_{\text{sign}}(\varphi) = T_{2H-1}(\varphi) = 2T_H(\varphi) - T_1(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

und folglich

$$T_{\text{sign}}'(\varphi) = 2T_H'(\varphi) - T_1'(\varphi) = 2\delta_0(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

2.3. Schwache Ableitung

Der Begriff der distributionellen Ableitung ist leider für unsere numerische Analyse viel zu allgemein. Deshalb benötigen wir einen stärkeren Begriff, der die klassische Ableitung immer noch gut verallgemeinert.

Definition 2.46 (schwache Ableitung)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ferner sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex. Eine Funktion $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ heißt α-te schwache Ableitung von f, falls gilt:

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \omega(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Für die α-te schwache Ableitung von f schreiben wir

$$D^\alpha f = \omega.$$

Zusammenhang zur distributionellen Ableitung: Eine Funktion $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ist genau dann die α-te schwache Ableitung von $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, wenn für die α-te distributionelle Ableitung $D^\alpha T_f \in C_0^\infty(\Omega)^*$ von f gilt:

$$D^\alpha T_f(\varphi) = T_\omega(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

denn laut Definition 2.41 und 2.46 gilt

$$\begin{aligned}D^\alpha T_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(D^\alpha \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{2|\alpha|} \int_\Omega \omega(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Folglich ist

$$D^\alpha T_f = T_\omega.$$

Mit anderen Worten ist $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ genau dann die α-te schwache Ableitung von $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, wenn die α-te distributionelle Ableitung $D^\alpha T_f$ von f regulär ist, und durch $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ generiert wird.

Beispiele 2.47.

(i) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$. Die distributionelle Ableitung von f haben wir bereits berechnet:

$$T_f'(\varphi) = T_{\mathrm{sign}}(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

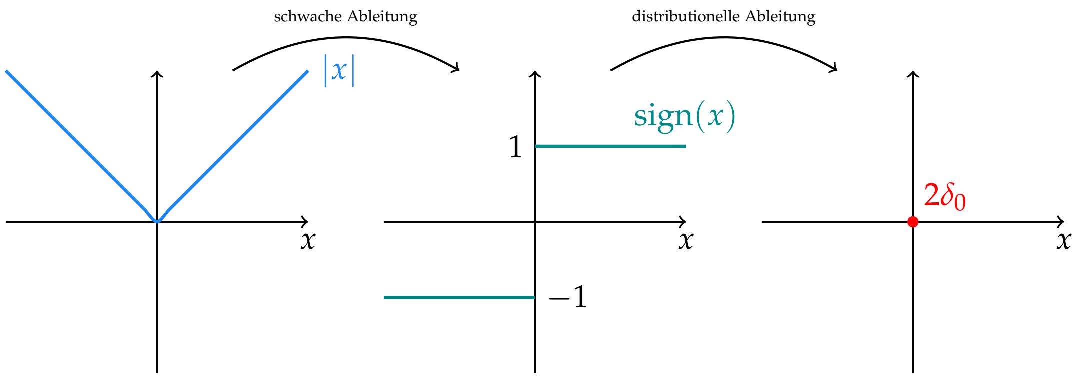
Da aber $\mathrm{sign} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ist, ist die Betragsfunktion schwach differenzierbar mit der schwachen Ableitung

$$f' = \mathrm{sign}\,.$$

Hierzu können wir auch die Definition 2.46 der schwachen Ableitung direkt überprüfen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} -\mathrm{sign}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Frage: Ist die Betragsfunktion zweimal schwach differenzierbar?



(ii) Die Betragsfunktion ist nicht zweimal schwach differenzierbar, denn $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht schwach differenzierbar. Annahme: $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wäre schwach differenzierbar mit der schwachen Ableitung $z \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende distributionelle Ableitung besitzt:

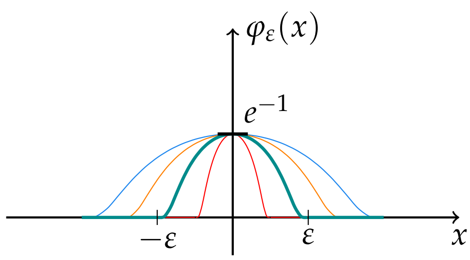
$$T_{\mathrm{sign}}' = 2\delta_0.$$

Unsere Annahme liefert

$$T_z(\varphi) = T_{\mathrm{sign}}'(\varphi) = 2\delta_0(\varphi) = 2\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{$*$}$$

Wir betrachten nun die folgende Funktion:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right), & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$



Für diese Funktion gilt

$$\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \;\text{ mit }\; \operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R} \;\text{ und }\; \varphi_\varepsilon(0) = e^{-1}.$$

Setzen wir φ_ε in $(*)$ ein, so erhalten wir

$$2e^{-1} = 2\varphi_\varepsilon(0) = 2\delta_0(\varphi_\varepsilon) = T'_{\mathrm{sign}}(\varphi_\varepsilon) = T_z(\varphi_\varepsilon).$$

Folglich gilt

$$2e^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} z(x)\varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} z(x)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x \le e^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |z(x)|\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0 \;\text{ für } \varepsilon \searrow 0.$$

Lemma 2.48 (Elementare Eigenschaft der schwachen Ableitung)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Existiert eine α-te schwache Ableitung $D^\alpha f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so ist diese bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt.

(ii) Ist $f \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $|\alpha| \le k$, so ist die α-te klassische Ableitung mit der α-ten schwachen Ableitung bis auf Nullmengen identisch.

Beweis.

(i) Es seien $v, w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ α-te schwache Ableitungen von f. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$
$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega w(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Somit gilt

$$\int_\Omega (v(x) - w(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt

$$v(x) = w(x) \;\text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

(ii) Es sei nun $f \in C^k(\Omega)$ mit $|\alpha| \le k \in \mathbb{N}$. Die Formel der partiellen Integration liefert

$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \underbrace{D^\alpha f(x)}_{\in C^{k-|\alpha|}(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da aber die klassische Ableitung $D^\alpha f \in C^{k-|\alpha|}(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ erfüllt, ist diese laut Definition 2.46 eine α-te schwache Ableitung von f, die nach (i) bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt ist.

$\square$

Fazit 2.49.

Klassische Ableitung $\longrightarrow$ schwache Ableitung $\longrightarrow$ distributionelle Ableitung.

2.4. Sobolevraum (Sergei Sobolev, 1908 - 1989)

Definition 2.50 (Sobolevraum)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1,\infty]$, sowie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Unter $W^{k,p}(\Omega)$ versteht man den Vektorraum aller Funktionen $f \in L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, für die alle schwachen Ableitungen $D^\alpha f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $|\alpha| \le k$ existieren und zu $L^p(\Omega)$ gehören:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \ \ \forall |\alpha| \le k\}.$$

Die $W^{k,p}$-Norm ist wie folgt definiert:

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Für den Fall $p = 2$ setzen wir

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$$

und als Spezialfall

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &:= \left\{ f \in L^2(\Omega) : D_j f \in L^2(\Omega) \ \ \forall j = 1, \dots, n \right\} \\ &= \left\{ f \in L^2(\Omega) : \nabla f \in L^2(\Omega)^n \right\}, \end{aligned}$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} (u,v)_{H^1(\Omega)} &:= \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n (D_j u, D_j v)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

und der induzierten Norm

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^n \int_\Omega |D_j f(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla f(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ist

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Satz 2.51. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty]$, sowie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Der Sobolevraum $\{W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\}$ ist ein Banachraum.*
Für $p = 2$ ist somit $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

ein Hilbertraum.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Norm in $W^{k,p}(\Omega)$ definiert. Die Normeigenschaften sind bis auf die Dreiecksungleichung trivial.
Zur Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun die bekannte Dreiecksunlgleichung für die l_p-Norm auf $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \|x + y\|_p &= \left(\sum_{i=1}^N |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_p + \|y\|_p, \end{aligned}$$

so erhalten wir die gewünschte Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass die $W^{k,p}(\Omega)$-Norm vollständig ist. Es sei also $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge. Nach Definition der $W^{k,p}(\Omega)$-Norm ist also $\{D^\alpha u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$ für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| \leq k$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Somit gilt aufgrund der Vollständigkeit des $L^p(\Omega)$-Raums:

$$\forall \alpha : |\alpha| \leq k \;\; \exists!\, u^\alpha \in L^p(\Omega) : \lim_{j\to\infty} \|D^\alpha u_j - u^\alpha\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{$*$}$$

Für $\alpha = (0, \dots, 0) = 0$ setzen wir

$$u := u^0 \in L^p(\Omega).$$

Wir zeigen nun $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{j\to\infty} \|D^\alpha u_j - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Nach ($*$) ist also nur noch

$$D^\alpha u = u^\alpha \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k$$

zu zeigen. Um dies zu beweisen, verwenden wir die Definition 2.46 der schwachen Ableitung. Sei also $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und α ein Multiindex mit $|\alpha| \leq k$. Dann gilt

$$\int_\Omega u_j(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_j(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_j(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

und mit ($*$) ergibt sich

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^\alpha(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aus der Definition folgt dann

$$D^\alpha u = u^\alpha.$$

□

Bemerkung 2.52. Die obige Konvergenz erfolgt zum Beispiel über die Hölder-Ungleichung:

$$\int_\Omega |(u(x) - u_j(x)) D^\alpha \varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|u - u_j\|_{L^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

mit $|u(x) - u_j(x)| \in L^p(\Omega)$ und $|D^\alpha \varphi(x)| \in C_0^\infty(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$.

2.5. $W_0^{k,p}(\Omega)$-Räume und die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

Definition 2.53. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Mit $W_0^{k,p}(\Omega)$ bezeichnen wir den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $W^{k,p}(\Omega)$-Norm:

$$
\begin{aligned}
W_0^{k,p}(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} \\
&= \{u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists \{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) : \lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0\} \\
&= \{u \in W^{k,p}(\Omega) : \exists \{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) : \lim_{j\to\infty} \|D^\alpha u_j - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = 0 \;\; \forall |\alpha| \leq k\}.
\end{aligned}
$$

Für $p = 2$ setzen wir

$$H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Bemerkung 2.54. Laut Definition ist

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$$

ein abgeschlossener Unterraum und somit ist $\{W_0^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{k,p}(\Omega)}\}$ ein Banachraum.

Satz 2.55 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung in $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $p \in [1, \infty)$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, unabhängig von u, so dass gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für $p \in (1, \infty)$ und $u \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u \not\equiv 0$. Es gilt

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_\Omega |u(x)|^p \underbrace{D_j x_j}_{=1} \, dx = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_\Omega D_j |u(x)|^p x_j \, dx.$$

Beachte, dass $p > 1$ gilt, so dass die Abbildung $x \mapsto |u(x)|^p$ stetig differenzierbar im klassischen Sinne mit der Ableitung

$$D_j |u(x)|^p = p |u(x)|^{p-1} \operatorname{sign}(u(x)) D_j u(x)$$

ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_\Omega p|u(x)|^{p-1}\operatorname{sign}(u(x)) D_j u(x) x_j \,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{p}{n}\sum_{j=1}^n \int_\Omega |u(x)|^{p-1}|D_j u(x)||x_j| \,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{dp}{n}\sum_{j=1}^n \int_\Omega |u(x)|^{p-1}|D_j u(x)| \,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{dp}{n}\sum_{j=1}^n \left(\int_\Omega |u(x)|^{(p-1)p'} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |D_j u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{dp}{n}\sum_{j=1}^n \left(\int_\Omega |u(x)|^{p} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |D_j u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p'}} \le \frac{dp}{n}\sum_{j=1}^n \left(\int_\Omega |D_j u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

und daraus folgt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{dp}{n}\sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{$*$}$$

Die Definition von $W_0^{1,p}(\Omega)$ liefert somit

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{dp}{n}\sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Damit ist die Behauptung für $p \in (1,\infty)$ bewiesen. Die Aussage für $p = 1$ erhalten wir durch den Übergang zum Limes in ($*$) für $p > 1,\ \ p \to 1$. $\square$

Bemerkung 2.56.

(i) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $p = 2$ erhalten wir

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

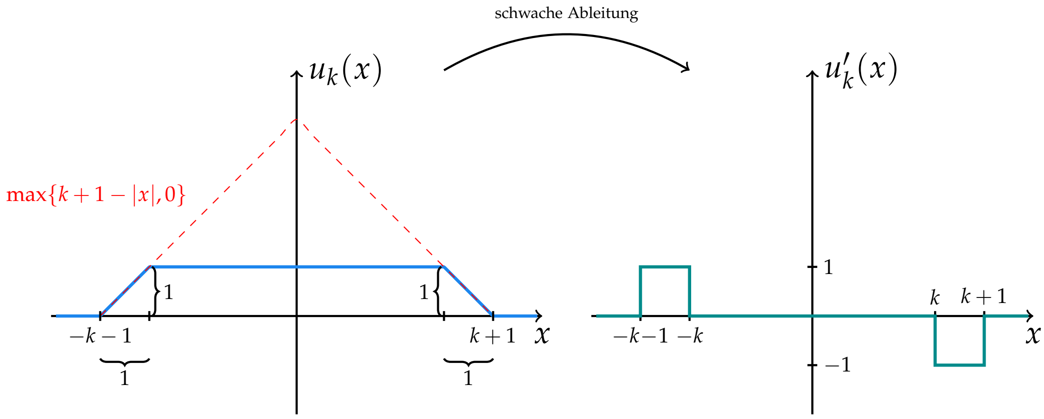
(ii) Die Aussage gilt auch für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die bezüglich einer Achse beschränkt ist, das heißt,

$$\exists\, d > 0\ \exists\, m \in \{1,\ldots,n\} : \forall x \in \Omega : |x_m| \le d.$$

(iii) Die Aussage für $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist falsch. Dazu ein Gegenbeispiel:

Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $p = 1$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$u_k(x) = \min\{1, \max\{k+1-|x|, 0\}\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Es gilt $u_k \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Annahme: Die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung wäre richtig. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, unabhängig von k, so dass gilt:

$$2k+1 = \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \, \mathrm{d}x \leq c \int_{\mathbb{R}} |u_k'(x)| \, \mathrm{d}x = 2c \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir einen Widerspruch.

Bemerkung 2.57. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \sum_{j=1}^{n} \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Diese Aussage ist jedoch für $W^{1,p}(\Omega)$-Funktionen falsch. Betrachte hierzu die konstante Funktion $u \equiv 1$.

2.6. Der Spuroperator

Randbedingungen spielen bei partiellen Differentialgleichungen eine überaus wichtige Rolle. Für stetige Funktionen auf einem Kompaktum $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ sind die Randwerte im üblichen Sinne wohldefiniert:

$$u \in C(\overline{\Omega}) \quad \Rightarrow \quad u\big|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega), \;\; u\big|_{\partial\Omega} = u(x) \;\; \forall x \in \partial\Omega.$$

Sobolev-Funktionen $u \in W^{k,p}(\Omega)$ sind jedoch im Allgemeinen nicht stetig, und man kann die Werte von u auf $\partial\Omega$ beliebig abändern, ohne dass sich u im Sinne des Raumes $W^{k,p}(\Omega)$ ändert, da $\partial\Omega$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ das Maß null hat. Funktionen, die sich auf Mengen vom Maß null unterscheiden, sind aber gleich im Sinne von $W^{k,p}(\Omega)$. Deshalb ist es unklar, wie man Randwerte einer Sobolev-Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$ erhalten soll.

Definition 2.58 ($C^{k,1}$**-Gebiete).** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gehören Ω beziehungsweise sein Rand zur Klasse $C^{k,1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, falls zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ um x sowie neue orthogonale Koordinaten $\{y_1, \ldots, y_n\}$ existieren, so dass gilt:

(i) V ist ein Hyperwürfel in den neuen Koordinaten:

$$\exists\, a_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, \ldots, n: \quad V = \{(y_1, \ldots, y_n) : -a_i < y_i < a_i \ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

(ii) Es existiert eine k-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : V' \to \mathbb{R}$ mit Lipschitz-stetigen Ableitungen der Ordnung k und

$$V' = \{(y_1, \ldots, y_{n-1}) : -a_i < y_i < a_i \ \forall i = 1, \ldots, n-1\},$$

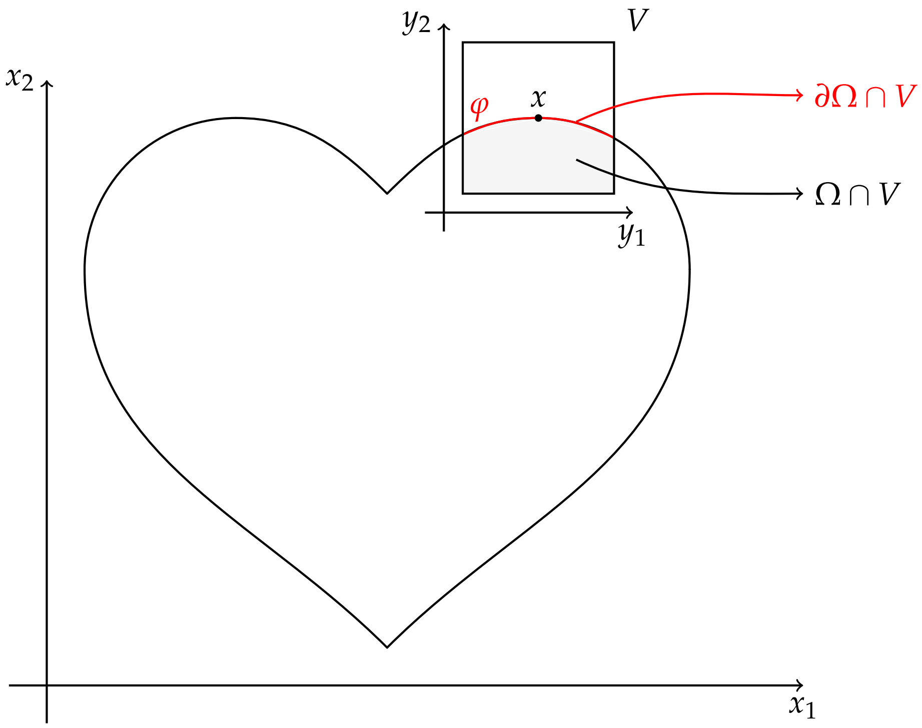
so dass gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi(y')| &\leq \frac{a_n}{2} \quad \forall y' = (y'_1, \ldots, y'_{n-1}) \in V', \\ \Omega \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V : y_n \leq \varphi(y')\}, \\ \partial\Omega \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V : y_n = \varphi(y')\}. \end{aligned}$$

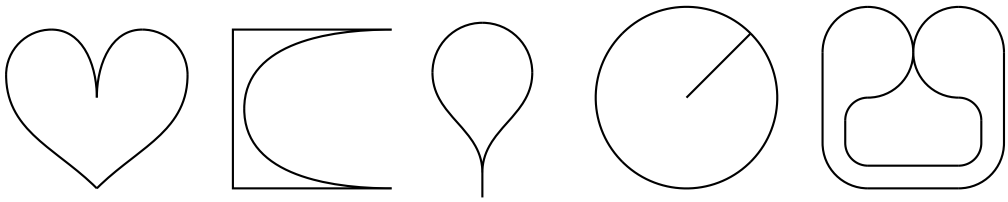
Mit anderen Worten liegt Ω lokal um x unterhalb des Graphen von φ und der Rand lässt sich lokal um x als der Graph von φ darstellen.

Definition 2.59. Gebiete der Klasse $C^{0,1}$ heißen *Lipschitzgebiete*.

Beispiel 2.60. Im Folgenden betrachten wir ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Klasse $C^{0,1}$.



Beispiel 2.61. Bei den folgenden Gebieten handelt es sich nicht um Gebiete der Klasse $C^{0,1}$.



Satz 2.62 (Spursatz). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Ferner sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert ein linearer und stetiger Operator*

$$\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

mit $\tau u = u\big|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Fazit 2.63. Randwerte einer Sobolev-Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, auf einem beschränkten Lipschitzgebiet Ω werden also durch

$$\tau u \in L^p(\partial\Omega)$$

verallgemeinert. Diese Verallgemeinerung ist in der Tat sinnvoll, denn

$$\tau u = u\big|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega).$$

Satz 2.64. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) : \lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0\} \\ &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tau u = 0\}. \end{aligned}$$

Für $p = 2$ gilt also

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \tau u = 0\}.$$

Beweis. Wir beweisen nur „$\subseteq$“:
Es sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$, so dass gilt

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Da der Spuroperator $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ stetig ist, folgt dann

$$\lim_{j\to\infty} \|\tau u_j - \tau u\|_{L^p(\partial\Omega)} = 0.$$

Andererseits wissen wir

$$\tau u_j = u_j\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

denn es gilt $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$. Somit ist

$$\|\tau u\|_{L^p(\partial\Omega)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\tau u)(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \partial\Omega.$$

Demzufolge gilt

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tau u = 0\}.$$

Für den Beweis der anderen Inklusion

$$W_0^{1,p}(\Omega) \supseteq \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tau u = 0\}$$

verweisen wir auf das Buch [5]. □

Bemerkung 2.65. Oft schreibt man auch

$$u\big|_{\partial\Omega} \text{ statt } \tau u \text{ beziehungsweise } u \text{ auf } \partial\Omega \text{ für } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Beispiel 2.66. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Raum

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D_j u \in L^2(\Omega) \ \ \forall j = 1, \dots, n\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x,$$

ist ein Hilbertraum. Ist Ω zusätzlich beschränkt und Lipschitzgebiet, dann gilt

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) : \exists \{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega) : \lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} = 0\} \\ &= \{u \in H^1(\Omega) : \tau u = 0\}. \end{aligned}$$

Satz 2.67. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle $u \in H^1(\Omega)$ und $v \in H_0^1(\Omega)$:*

$$\int_\Omega u(x) D_i v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u(x) v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Beweis. Es sei $u \in H^1(\Omega)$ und $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{H^1(\Omega)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{L^2(\Omega)} = 0, \\ \lim_{j\to\infty} \|D_i v_j - D_i v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{$*$}$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist $v_j \in C_0^\infty(\Omega)$. Somit gilt nach Definition der schwachen Ableitung

$$\int_\Omega u(x) D_i v_j(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u(x) v_j(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega u(x) D_i v_j(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty} -\int_\Omega D_i u(x) v_j(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall i = 1, \dots, n$$

und mit ($*$) erhalten wir insgesamt

$$\int_\Omega u(x) D_i v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u(x) v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

□

Kapitel 3

Schwache Lösungstheorie für lineare elliptische PDE

Definition 3.1. Seien $\{X, \|\cdot\|_X\}$ und $\{Y, \|\cdot\|_Y\}$ normierte reelle Vektorräume. Ein Operator $A : X \to Y$ heißt:

(i) *linear*, falls gilt

$$A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av \quad \forall u, v \in X,\ \lambda \in \mathbb{R};$$

(ii) *beschränkt*, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$\|Au\|_Y \leq c\|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Beachte, dass die Konstante $c > 0$ unabhängig von u ist.

Bemerkung 3.2. Ein linearer Operator ist genau dann beschränkt, wenn er stetig ist.

Definition 3.3 (Dualraum)**.** Es sei $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Mit

$$\begin{aligned} X^* &:= \{f : X \to \mathbb{R} \ \text{ linear und stetig}\} \\ &= \{f : X \to \mathbb{R} \ \text{ linear und beschränkt}\} \end{aligned}$$

bezeichnen wir den *Dualraum* von X.

Bemerkung 3.4. Jedes Element $f \in X^*$ ist also ein lineares und stetiges Funktional $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition 3.5 (Duale Paarung)**.** Es sei $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ein normierter reeller Vektorraum. Wir definieren die *duale Paarung* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*,X} : X^* \times X \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\langle f, x \rangle_{X^*,X} := f(x) \quad \forall f \in X^* \ \ \forall x \in X.$$

Definition 3.6 (Duale Norm)**.** Es sei $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ein reeller normierter Vektorraum. Wir definieren die *duale Norm* $\|\cdot\|_{X^*} : X^* \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, x \rangle_{X^*,X}|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} |\langle f, x \rangle_{X^*,X}| \quad \forall f \in X^*.$$

Man beachte, dass $\{X^*, \|\cdot\|_{X^*}\}$ ein vollständiger normierter Vektorraum ist, also ein Banachraum (auch im Falle, wo X kein Banachraum ist).

Satz 3.7 (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Es sei $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ ein reeller Hilbertraum. Dann existiert zu jedem linearen und stetigen Funktional $f \in H^*$ genau ein Element $u_f \in H$ mit*

$$\langle f, h \rangle_{H^*,H} = (u_f, h)_H \quad \forall h \in H$$

und

$$\|f\|_{H^*} = \|u_f\|_H.$$

Die Abbildung $j : H^* \to H$, $f \mapsto u_f$ ist ein isometrischer Isomorphismus, das heißt, $j : H^* \to H$ ist linear, bijektiv und stetig (und somit ist $j^{-1} : H \to H^*$ linear und stetig), sowie

$$\|j(f)\|_H = \|f\|_{H^*}.$$

Bemerkung 3.8. Mit diesem Darstellungssatz kann man also jeden Hilbertraum mit seinem Dualraum identifizieren ($H \cong H^*$).

Beispiel 3.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert zu jedem linearen und stetigen Funktional $f \in H^1(\Omega)^*$, $f : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, genau ein Element $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\langle f, h \rangle_{H^1(\Omega)^*, H^1(\Omega)} = (u, h)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)h(x) + \nabla u(x) \nabla h(x) \,\mathrm{d}x \quad \forall h \in H^1(\Omega).$$

Ebenso existiert zu jedem $f \in H_0^1(\Omega)^*$ genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\langle f, h \rangle_{H_0^1(\Omega)^*, H_0^1(\Omega)} = (u, h)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)h(x) + \nabla u(x) \nabla h(x) \,\mathrm{d}x \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Bemerkung 3.10. In der Literatur schreibt man auch oft

$$H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)^*$$

für den Dualraum von $H_0^1(\Omega)$.

3.1. Das Lemma von Lax-Milgram

Wir zeigen ein zentrales Resultat der Theorie der linearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen, bekannt unter dem Namen „das Lemma von Lax-Milgram“.

Definition 3.11. Es sei $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ein Banachraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $a : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt:

(i) *Bilinearform*, falls a in jeder Komponente linear ist;

(ii) *symmetrisch*, falls gilt
$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in X;$$

(iii) *koerzitiv*, falls eine Konstante $\lambda > 0$ existiert, so dass gilt
$$a(u,u) \geq \lambda \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X;$$

(iv) *beschränkt*, falls eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass gilt
$$|a(u,v)| \leq c\|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u,v \in X.$$

Beachte, dass die Konstanten $\lambda, c > 0$ nicht von u und v abhängig sind.

Satz 3.12 (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ein Banachraum und $\Phi : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, das heißt, es existiert ein $L \in [0,1)$ mit*
$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_X \leq L\|u - v\|_X \quad \forall u,v \in X.$$
Dann hat $\Phi : X \to X$ genau einen Fixpunkt, das heißt, es existiert genau ein $u^* \in X$ mit
$$u^* = \Phi(u^*).$$

Satz 3.13 (Lemma von Lax-Milgram). *Es sei $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ ein reeller Hilbertraum und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzitive Bilinearform. Dann besitzt die Variationsgleichung*
$$a(u,v) = \langle F, v \rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in H$$
zu jedem $F \in H^*$ genau eine Lösung $u \in H$.

Beweis. Ist $a : H \times H \to \mathbb{R}$ zusätzlich symmetrisch, dann folgt die Aussage unmittelbar aus dem Darstellungssatz von Riesz.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo $a : H \times H \to \mathbb{R}$ nicht unbedingt symmetrisch sein muss. Für jedes feste $u \in H$ betrachten wir die Abbildung
$$a(u,\cdot) : H \to \mathbb{R}.$$

Laut Voraussetzung ist diese Abbildung linear und beschränkt. Somit ist $a(u, \cdot) \in H^*$. Wir definieren nun den Operator

$$A : H \to H^*, \quad u \mapsto a(u, \cdot).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass der Operator A linear und beschränkt ist.
Zur Linearität: Seien $u_1, u_2 \in H$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $v \in H$:

$$\begin{aligned}\langle A(u_1 + \beta u_2), v\rangle_{H^*,H} = a(u_1 + \beta u_2, v) &= a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) \\ &= \langle Au_1, v\rangle_{H^*,H} + \beta\langle Au_2, v\rangle_{H^*,H}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$A(u_1 + \beta u_2) = Au_1 + \beta Au_2.$$

Zur Beschränktheit: Sei $u \in H$. Dann gilt

$$\|Au\|_{H^*} = \sup_{v \in H\setminus\{0\}} \frac{|\langle Au, v\rangle_{H^*,H}|}{\|v\|_H} = \sup_{v \in H\setminus\{0\}} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|_H} \leq \sup_{v \in H\setminus\{0\}} c\frac{\|u\|_H\|v\|_H}{\|v\|_H} = c\|u\|_H.$$

Es sei $F \in H^*$. Wir zeigen nun, dass es genau ein $u \in H$ gibt mit

$$a(u, v) = \langle F, v\rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in H \quad \Leftrightarrow \quad Au = F \text{ in } H^* \quad \Leftrightarrow \quad j(Au) = j(F) \text{ in } H,$$

wobei $j : H^* \to H$ den isometrischen Isomorphismus aus dem Darstellungssatz von Riesz bezeichnet. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}j(Au) = j(F) \text{ in } H \quad &\Leftrightarrow \quad u = \varepsilon j(F) - \varepsilon j(Au) + u \text{ in } H \\ &\Leftrightarrow \quad u = \Phi_\varepsilon(u) \text{ in } H,\end{aligned}$$

mit $\Phi_\varepsilon : H \to H,\ \ \Phi_\varepsilon(v) = \varepsilon j(F) - \varepsilon j(Av) + v$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ zeigen wir nun, dass $\Phi_\varepsilon : H \to H$ eine kontrahierende Abbildung ist, und somit hat Φ_ε genau einen Fixpunkt (Banachscher Fixpunktsatz).
Seien $u, v \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|_H^2 &= \|-\varepsilon j(Au) + \varepsilon j(Av) + u - v\|_H^2 \\ &= \|-\varepsilon j(A(v-u)) + u - v\|_H^2 \\ &= \|u - v\|_H^2 + \|\varepsilon j(A(v-u))\|_H^2 - 2\varepsilon(j(A(u-v)), u - v)_H \\ &= \|u - v\|_H^2 + \varepsilon^2\|A(v-u)\|_{H^*}^2 - 2\varepsilon\langle A(u-v), u - v\rangle_{H^*,H} \\ &= \|u - v\|_H^2 + \varepsilon^2\|A(v-u)\|_{H^*}^2 - 2\varepsilon a(u - v, u - v) \\ &\leq \|u - v\|_H^2 + \varepsilon^2 c^2\|u - v\|_H^2 - 2\varepsilon\lambda\|u - v\|_H^2\end{aligned}$$

mit von u oder v unabhängigen Konstanten $c, \lambda > 0$. Somit haben wir gezeigt:

$$\|\Phi_\varepsilon(u) - \Phi_\varepsilon(v)\|_H^2 \leq \underbrace{(1 + \varepsilon(\varepsilon c^2 - 2\lambda))}_{<1 \text{ für } 0<\varepsilon<\frac{2\lambda}{c^2}}\|u - v\|_H^2.$$

Für $0 < \varepsilon < \frac{2\lambda}{c^2}$ ist $\Phi_\varepsilon : H \to H$ kontrahierend und somit besitzt Φ_ε genau einen Fixpunkt:

$$\exists\, !\, u \in H : \Phi_\varepsilon(u) = u \text{ in } H \quad \Leftrightarrow \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in H.$$

$\square$

Korollar 3.14. *Es sei $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ ein reeller Hilbertraum und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ koerzitiv und beschränkt. Dann gibt es zu jedem $F \in H^*$ genau ein $u \in H$, so dass gilt*

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in H.$$

Die Lösung erfüllt

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda}\|F\|_{H^*}$$

mit einer von u beziehungsweise F unabhängigen Konstanten $\lambda > 0$.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit folgt mit dem Lemma von Lax-Milgram. Setzen wir $v = u \in H$, so erhalten wir

$$\lambda\|u\|_H^2 \leq a(u,u) = \langle F, u\rangle_{H^*,H} \leq \|F\|_{H^*}\|u\|_H.$$

Folglich gilt

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda}\|F\|_{H^*}.$$

$\square$

Beachte, dass wir für die obige Ungleichung das folgende Resultat verwendet haben:

Lemma 3.15. *Es sei $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ein Banachraum und $F \in X^*$. Dann gilt*

$$|\langle F, v\rangle_{X^*,X}| \leq \|F\|_{X^*}\|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

Beweis. Die Aussage ist trivial für $v = 0$. Sei also $v \in X \setminus \{0\}$. Dann gilt nach Definition

$$\frac{|\langle F, v\rangle_{X^*,X}|}{\|v\|_X} \leq \sup_{w \in X\setminus\{0\}} \frac{|\langle F, w\rangle_{X^*,X}|}{\|w\|_X} = \|F\|_{X^*}.$$

Daher ist

$$|\langle F, v\rangle_{X^*,X}| \leq \|F\|_{X^*}\|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

$\square$

3.2. Schwache Lösung für die Poisson-Gleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir betrachten die Poisson-Gleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \quad\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$. Die Existenz einer klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ für (3.2) kann man nicht erwarten, da $f \in L^2(\Omega)$ im Allgemeinen nicht stetig sein muss.

3.2.1. Schwache Formulierung (Variationsformulierung)

Im Folgenden definieren wir eine geeignete schwache Formulierung für (3.2). Dazu multiplizieren wir (3.2) mit einer Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und integrieren die resultierende Gleichung über Ω:

$$\int_\Omega -\Delta u(x) v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Formale Anwendung der partiellen Integration liefert:

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Diese Integralgleichung ist sinnvoll für $u \in H_0^1(\Omega)$. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist ($H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$), gilt diese Integralgleichung auch für alle Testfunktionen $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Definition 3.16 (schwache Lösung)**.** Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* zu (3.2), falls u die schwache Formulierung von (3.2)

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

löst.

Diese Definition ist in der Tat sinnvoll, da jede schwache Lösung zu (3.2) die ursprüngliche Gleichung im distributionellen Sinne erfüllt. Zudem erfüllt jede schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ die homogene Dirichlet-Randbedingung, falls Ω zusätzlich Lipschitz ist.

Lemma 3.17. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $f \in L^2(\Omega)$. Ist $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung zu (3.2), so gilt*

$$-\Delta u = f$$

im distributionellen Sinne, das heißt, es gilt

$$-\Delta T_u = T_f,$$

wobei $T_u \in C_0^\infty(\Omega)^*$ beziehungsweise $T_f \in C_0^\infty(\Omega)^*$ die durch u beziehungsweise f erzeugten regulären Distributionen sind.

Beweis. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung zu (3.2). Dann gilt

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Mit anderen Worten ist

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i u(x) D_i v(x) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

da $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ist. Demzufolge liefert die Definition der schwachen Ableitung

$$\sum_{i=1}^n - \int_\Omega u(x) D_i D_i v(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i u(x) D_i v(x) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

also

$$\sum_{i=1}^n -T_u(D_i D_i v) = T_f(v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Folglich gilt nach der Definition der distributionellen Ableitung

$$-\sum_{i=1}^n D_i D_i T_u(v) = -\sum_{i=1}^n (-1)^2 T_u(D_i D_i v) = T_f(v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

und somit erhalten wir insgesamt

$$-\Delta T_u = T_f.$$

□

Satz 3.18 (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zu (3.2))**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann existiert zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ zu (3.2). Zudem existiert eine von u und f unabhängige Konstante $\lambda > 0$, so dass gilt*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Wir verwenden den Hilbertraum $\{H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}\}$ und definieren

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x$$

sowie

$$F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \langle F, v\rangle_{H_0^1(\Omega)^*, H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit lässt sich die schwache Formulierung schreiben als

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle_{H_0^1(\Omega)^*, H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Wir müssen also nachweisen, dass $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt und koerzitiv ist, sowie dass $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear und beschränkt ist, das heißt, $F \in H_0^1(\Omega)^*$.

Zur Beschränktheit von a:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \le \int_\Omega |\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)|\,\mathrm{d}x &\le \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla v(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Zur Koerzitivität von a: Da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt ist, liefert die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung die Existenz einer Konstante $c_P > 0$, so dass gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le c_P^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (c_P^2 + 1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Mit dieser Abschätzung folgt die gewünschte Koerzitivität:

$$a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \ge (c_P^2 + 1)^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten $\lambda := (c_P^2 + 1)^{-1}$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $F \in H_0^1(\Omega)^*$ gilt. Die Linearität ist trivial.

Zur Beschränktheit:

$$\begin{aligned} |\langle F, v\rangle_{H_0^1(\Omega)^*, H_0^1(\Omega)}| \le \int_\Omega |f(x)v(x)|\,\mathrm{d}x &\le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Somit ist $F \in H_0^1(\Omega)^*$ gezeigt.

Insgesamt liefert das Lemma von Lax-Milgram die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ zu (3.2).

Die Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt

$$\lambda \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u,u) = \langle F, u \rangle_{H_0^1(\Omega)^*, H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Insgesamt gilt also

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Bemerkung 3.19. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so definiert die $H^1(\Omega)$-Seminorm

$$|u|_{H^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

bereits eine Norm auf $H_0^1(\Omega)$, denn diese ist äquivalent zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} |u|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \sqrt{c_P^2 + 1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \sqrt{c_P^2 + 1} |u|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

wobei wir die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung angewendet haben.

Definition 3.20. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann definiert

$$(\cdot,\cdot)_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad (u,v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$. Zusammen mit der induzierten Norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

ist $H_0^1(\Omega)$ vollständig. Mit anderen Worten ist $\{H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H_0^1(\Omega)}\}$ ein Hilbertraum.

3.3. Schwache Lösung für allgemeine lineare elliptische PDE mit homogener Dirichlet-Randbedingung

In diesem Abschnitt untersuchen wir ein allgemeines elliptisches Randwert-Problem der Form

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

mit einem elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung:

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}D_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu.$$

Hier sind $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Definieren wir die Matrixfunktion

$$A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A(x) = (a_{ij}(x))$$

sowie die Vektorfunktion

$$b : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad b(x) = (b_i(x))_{i=1}^n,$$

so lässt sich der Operator L wie folgt darstellen:

$$Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu.$$

Wir treffen die folgenden Annahmen für Aufgabe (3.3):

(A0) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt.

(A1) Es seien $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

(A2) Die Matrixfunktion A sei symmetrisch und gleichmäßig positiv definit, das heißt, es existiere eine Konstante $a_0 > 0$, so dass gilt

$$\xi^T A(x)\xi \geq a_0|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und für fast alle $x \in \Omega$.

Analog wie bei der Poisson-Gleichung erhalten wir die schwache Formulierung zu (3.3) durch Multiplikation von (3.3) mit einer Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und Integration über Ω sowie formale Anwendung der partiellen Integration.

Definition 3.21. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung zu (3.3), falls u die schwache Formulierung (Variationsgleichung)

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) + b(x) \cdot \nabla u(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt.

Lemma 3.22. *Es seien (A0)-(A2) erfüllt. Ist $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung zu (3.3), so erfüllt u*

$$Lu = f$$

im distributionellen Sinne.

Beweis. Siehe Abschnitt 3.2. □

Lemma 3.23. *Es seien (A0)-(A2) erfüllt. Dann ist die Bilinearform $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit*

$$a(u,v) := \int_\Omega (A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) + b(x) \cdot \nabla u(x) v(x) + c(x) u(x) v(x) \,\mathrm{d}x$$

beschränkt und erfüllt

$$a(u,u) \geq \frac{a_0}{2} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{(b^*)^2}{2a_0} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega c(x) u^2(x) \,\mathrm{d}x \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

mit $b^* := \max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$ und $a_0 > 0$ wie in (A2).

Beweis. Zur Beschränktheit:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega |A(x)\nabla u(x)||\nabla v(x)| + |b(x)\nabla u(x)||v(x)| + |c(x)u(x)v(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\leq a^* \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla v(x)| \,\mathrm{d}x + b^* \int_\Omega |\nabla u(x)||v(x)| \,\mathrm{d}x + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u(x)v(x)| \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$ mit $a^* := n \max_{1 \leq i,j \leq n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$ und $b^* := \max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$. Folglich gilt nach Hölderscher Ungleichung:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq a^* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + b^* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq a^* \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + c_P b^* \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + c_P^2 \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= (a^* + c_P b^* + c_P^2 \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$, wobei wir die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = c_P \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

angewendet haben.

Die zweite Aussage folgt aus (A2) und der Youngschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} a_0 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega a_0 |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \nabla u(x)^T A(x) \nabla u(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla u(x) \,\mathrm{d}x \\ &= a(u,u) - \int_\Omega b(x) \cdot \nabla u(x) u(x) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega c(x) u^2(x) \,\mathrm{d}x \\ &\leq a(u,u) + b^* \int_\Omega |\nabla u(x)||u(x)| \,\mathrm{d}x - \int_\Omega c(x) u^2(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ist $b^* = 0$, so sind wir fertig. Sei nun $b^* > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} b^* \int_\Omega |\nabla u(x)||u(x)| \, \mathrm{d}x &= b^* \int_\Omega \sqrt{2\varepsilon}\, |\nabla u(x)| (\sqrt{2\varepsilon})^{-1} |u(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\leq b^* \int_\Omega \varepsilon |\nabla u(x)|^2 + \frac{|u(x)|^2}{4\varepsilon} \, \mathrm{d}x \\ &= \varepsilon b^* \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b^*}{4\varepsilon} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für alle $u \in H^1_0(\Omega)$:

$$a_0 \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq a(u,u) + \varepsilon b^* \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{b^*}{4\varepsilon} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega c(x) u^2(x) \, \mathrm{d}x,$$

also folglich

$$(a_0 - \varepsilon b^*) \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \frac{b^*}{4\varepsilon} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega c(x) u^2(x) \, \mathrm{d}x \leq a(u,u).$$

Setzen wir $\varepsilon := \frac{a_0}{2b^*}$, so erhalten wir insgesamt

$$\frac{a_0}{2} \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \frac{(b^*)^2}{2a_0} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega c(x) u^2(x) \, \mathrm{d}x \leq a(u,u) \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

□

Satz 3.24 (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zu (3.3))**.** *Es seien* (A0)-(A2) *erfüllt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Gilt $b(x) = 0$ und $c(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$, so besitzt die Aufgabe (3.3) *zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$ mit*

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer von u und f unabhängigen Konstanten $\lambda > 0$.

(ii) Es sei $c(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Dann existiert eine Konstante $\mu_0 \geq 0$, sodass zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ und $\mu \geq \mu_0$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3b}$$

genau eine schwache Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$ besitzt.

Beweis.

(i) Das Lemma 3.23 impliziert, dass die Bilinearform beschränkt und koerzitiv sowie $F \in H^1_0(\Omega)$ ist. Somit folgt die Behauptung aus dem Lemma von Lax-Milgram.

(ii) Die schwache Formulierung zu (3.3b) lautet

$$a_\mu(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

mit

$$a_\mu : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad a_\mu(u,v) = a(u,v) + \mu(u,v)_{L^2(\Omega)}, \quad \mu \in \mathbb{R}_0^+.$$

Die Beschränktheit von a_μ folgt unmittelbar aus der Beschränktheit von a. Zudem gilt

$$\begin{aligned} a_\mu(u,u) &= a(u,u) + \mu\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\overset{\text{Lemma 3.23}}{\geq} \frac{a_0}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left(\mu - \frac{(b^*)^2}{2a_0}\right)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega c(x)u^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{a_0}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left(\mu - \frac{(b^*)^2}{2a_0}\right)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Somit ist a_μ koerzitiv, falls $\mu \geq \mu_0 := \frac{(b^*)^2}{2a_0}$ gilt. Mit dem Lemma von Lax-Milgram folgt die Behauptung.

□

Korollar 3.25. *Ist $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung zu (3.3), so erfüllt u:*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla T_u) + b(x)\cdot\nabla T_u + T_{cu} = T_f \quad \text{in } C_0^\infty(\Omega)^*.$$

Mit anderen Worten erfüllt $u \in H_0^1(\Omega)$ die PDE (3.3) im distributionellen Sinne.

Beweis. Da $u \in H_0^1(\Omega)$ schwach differenzierbar ist, gilt

$$D_i T_u = T_{D_i u} \quad \text{in } C_0^\infty(\Omega)^* \text{ für alle } i = 1,\dots,n.$$

Somit gilt

$$\nabla T_u = T_{\nabla u}$$

und folglich

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla T_u) = -\operatorname{div}(A(x)T_{\nabla u}).$$

Da $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Formulierung zu (3.3) erfüllt, so gilt für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x)\nabla T_u(v)) &= -\operatorname{div}(A(x)T_{\nabla u}(v)) \\ &= \sum_{i=1}^n (A(x)T_{\nabla u})_i(D_i v(x)) \\ &= \int_\Omega (A(x)\nabla u(x))\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega b(x)\cdot\nabla u(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -b(x)T_{\nabla u(x)}(v) - T_{cu}(v) + T_f(v) \\ &= -b(x)\nabla T_u(v) - T_{cu}(v) + T_f(v). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla T_u(v)) + b(x)\cdot\nabla T_u(v) + T_{cu(v)} = T_f(v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

□

3.4. Elliptische PDE mit anderen Randbedingungen

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Diese Annahme liefert die Existenz des Spuroperators $\tau : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit den Eigenschaften:

(i) Der Operator $\tau : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ ist linear und beschränkt.

(ii) Es gilt $\tau(u) = u\big|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Der Spuroperator verallgemeinert die Randwerte für Sobolevfunktionen $u \in H^1(\Omega)$. In diesem Fall gilt

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \tau u = 0\}.$$

3.4.1. Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

Wir betrachten die Aufgabe

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \quad u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Definition 3.26. Es seien $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$. Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung zu (3.4.1), falls gilt:

(i) $\tau(u) = g$ in $L^2(\partial\Omega)$,

(ii) $\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Satz 3.27 (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zu (3.4.1))**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $f \in L^2(\Omega)$ sowie $g \in \tau(H^1(\Omega)) = \operatorname{Bild}(\tau)$. Dann besitzt die Aufgabe* (3.4.1) *genau eine schwache Lösung.*

Beweis. Laut Annahme gibt es ein $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ mit

$$\tau(\tilde{g}) = g \quad \text{in } L^2(\partial\Omega).$$

Wir betrachten die Aufgabe: Finde $w \in H_0^1(\Omega)$, so dass gilt

$$\int_\Omega \nabla w(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\tilde{g}(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{$*$}$$

Die linke Seite definiert eine beschränkte und koerzitive Bilinearform (siehe Satz 3.18). Die rechte Seite definiert ein lineares und beschränktes Funktional

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\tilde{g}(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Die Linearität ist trivial. Zur Beschränktheit:

$$\begin{aligned}|F(v)| &\leq c_P\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\nabla\tilde{g}\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= (c_P\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\tilde{g}\|_{L^2(\Omega)})\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Somit hat ($*$) genau eine Lösung $w \in H_0^1(\Omega)$ (Lemma von Lax-Milgram). Wir setzen nun

$$u := w + \tilde{g}.$$

Wir zeigen, dass u eine schwache Lösung zu (3.4.1) ist. Zum einen gilt

$$\tau(u) = \tau(w) + \tau(\tilde{g}) = 0 + g = g.$$

Zum anderen gilt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega (\nabla w(x) + \nabla\tilde{g}(x))\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\tilde{g}(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\tilde{g}(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Damit ist $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung zu (3.4.1). Es sei $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ eine andere schwache Lösung zu (3.4.1). Dann gilt

$$\tau(u - \hat{u}) = g - g = 0.$$

Mit anderen Worten ist $u - \hat{u} \in H_0^1(\Omega)$. Wir wissen auch, dass

$$\int_\Omega \nabla(u(x) - \hat{u}(x))\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

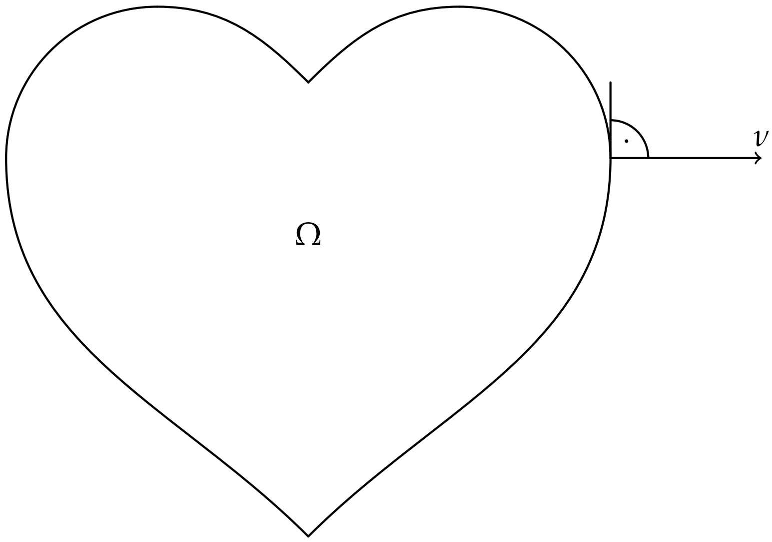
gilt. Mit $v = u - \hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ erhalten wir somit

$$\int_\Omega |\nabla(u(x) - \hat{u}(x))|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Das bedeutet $\|u - \hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 0$, also insgesamt $u - \hat{u} = 0$. □

3.4.2. Inhomogene Neumann-Randbedingungen (Randbedingungen zweiter Art)

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor auf $\partial\Omega$.



Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = g & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

wobei $\partial_\nu u := \nabla u \cdot \nu$ auf $\partial\Omega$ bezeichnet und $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ gegebene Daten sind.

Satz 3.28 ([5, Theorem 3.6]). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann liegt der Raum*

$$C^\infty(\overline{\Omega}) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\big|_{\overline{\Omega}}$$

dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$-Norm für alle $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$.

Mit diesem Satz können wir die schwache Formulierung für (3.4.2) herleiten. Wir multiplizieren (3.4.2) mit einer Testfunktion $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und integrieren die resultierende Gleichung über Ω:

$$\int_\Omega -\Delta uv + cuv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x.$$

Durch formale Anwendung der Greenschen Formel (Analysis 3) erhalten wir:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \nu \,\mathrm{d}s + \int_\Omega cuv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x.$$

Setzen wir die Randbedingung $\partial_\nu u = g$ auf $\partial\Omega$ ein, so erhalten wir

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + cuv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} gv \,\mathrm{d}s$$

für alle $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Diese Integralgleichung ist für $u \in H^1(\Omega)$ wohldefiniert, und aufgrund der Dichtheit von $C^\infty(\overline{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$ kommen wir auf die folgende schwache Formulierung:

Definition 3.29 (schwache Lösung)**.** Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung zu (3.4.2), falls u die schwache Formulierung für (3.4.2)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + cuv \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

erfüllt.

Bemerkung 3.30. Wir schreiben

$$\int_{\partial\Omega} gv \, ds = \int_{\partial\Omega} g\tau(v) \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

mit dem Spuroperator.

Satz 3.31 (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zu (3.4.2))**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$ mit*

$$c(x) \geq c_0 > 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Dann besitzt die Aufgabe (3.4.2) zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ und jedem $g \in L^2(\partial\Omega)$ genau eine schwache Lösung.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Lemma von Lax-Milgram. Die linke Seite der Variationsformulierung

$$a(u,v) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + cuv \, dx$$

ist beschränkt:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

sowie koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega c(x) u^2(x) \, dx &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \min\{1, c_0\} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ &\geq \min\{1, c_0\} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Variationsformulierung

$$F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad F(v) = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} g\tau(v) \, ds$$

ist linear und beschränkt. Die Linearität ist trivial. Zur Beschränktheit:

$$\begin{aligned}|F(v)| &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\tau(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\le (\|f\|_{L^2(\Omega)} + c_\tau\|g\|_{L^2(\partial\Omega)})\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

□

Korollar 3.32. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $c \in L^\infty(\Omega)$ mit*

$$c(x) \ge c_0 > 0 \quad \textit{für fast alle } x \in \Omega$$

sowie $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$. Dann erfüllt die schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ die PDE (3.4.2) im distributionellen Sinne, das heißt

$$-\Delta T_u + T_{cu} = T_f \quad \textit{in } C_0^\infty(\Omega)^*.$$

Ist $u \in H^2(\Omega)$, so gilt

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \textit{für fast alle } x \in \Omega$$

und

$$\partial_\nu u = \tau(\nabla u) \cdot \nu \in L^2(\partial\Omega)$$

mit

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u - g)\tau(v)\, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Beweis. Die schwache Lösung erfüllt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + cuv\, \mathrm{d}x = \int_\Omega fv\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} gv\, \mathrm{d}s \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Da $C_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ gilt, erhalten wir die Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + cuv\, \mathrm{d}x = \int_\Omega fv\, \mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{$*$}$$

welche äquivalent ist zu

$$\sum_{i=1}^n T_{D_i u}(D_i v) + T_{cu}(v) = T_f(v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da u schwach differenzierbar ist, gilt

$$T_{D_i u}(\varphi) = D_i T_u(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demzufolge gilt

$$-\sum_{i=1}^n D_i D_i T_u(v) + T_{cu}(v) = T_f(v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

also
$$-\Delta T_u + T_{cu} = T_f \quad \text{in } C_0^\infty(\Omega)^*.$$
Wir nehmen an, dass $u \in H^2(\Omega)$ gelte. In diesem Fall liefert ($*$)
$$\int_\Omega (-\Delta u)v + cuv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$
und somit
$$\int_\Omega (-\Delta u + cu - f)v \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$
Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert dann
$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega. \tag{$**$}$$
Verwenden wir die Greensche Formel für die schwache Formulierung zu (3.4.2), so erhalten wir
$$\int_\Omega (-\Delta u)v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \nu \,\mathrm{d}s + \int_\Omega cuv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} gv \,\mathrm{d}s \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$
Mit ($**$) folgt
$$\int_{\partial\Omega} \tau(v)\tau(\nabla u) \cdot \nu \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} g\tau(v) \,\mathrm{d}s \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$
und somit insgesamt
$$\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u - g)\tau(v) \,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$
□

Bemerkung 3.33. Für den Beweis haben wir die Greensche Formel für $H^1(\Omega)$-Sobolevfunktionen angewendet:
$$\int_\Omega uD_iv \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_iuv \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \,\mathrm{d}s \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)\ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{$*$}$$
Hieraus folgt für $u \in H^2(\Omega)$ und $v \in H^1(\Omega)$:
$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_\Omega D_iuD_iv \,\mathrm{d}x &= -\sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i^2uv \,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} vD_iu\nu_i \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \Delta uv \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \nu \,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$
Der Beweis für ($*$) kommt später. Wir haben auch stillschweigend die Regularität $\nu \in L^\infty(\partial\Omega)^n$ verwendet. Diese Regularität gilt, da Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet ist.

Bemerkung 3.34. Im Falle $c \equiv 0$ hat (3.4.2) im Allgemeinen keine eindeutige Lösung. Der Fall $c \equiv 0$ lässt sich mit dem Quotientenraum $H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ behandeln.

3.4.3. Inhomogene Robin-Randbedingungen (Randbedingungen dritter Art)

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u + \beta u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4.3}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$, $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ sowie $g \in L^2(\partial\Omega)$. Die schwache Formulierung erhalten wir durch Multiplikation von (3.4.3) mit $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, Integration über Ω sowie formaler Anwendung der Greenschen Formel.

Definition 3.35 (schwache Lösung)**.** Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung zu (3.4.3), falls u die schwache Formulierung zu (3.4.3)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta u v \,\mathrm{d}s = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g v \,\mathrm{d}s \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

erfüllt.

Beachte:

$$\int_{\partial\Omega} \beta u v \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} \beta \tau(u) \tau(v) \,\mathrm{d}s$$

und

$$\int_{\partial\Omega} g v \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} g \tau(v) \,\mathrm{d}s.$$

Lemma 3.36. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $f \in L^2(\Omega)$, $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ sowie $g \in L^2(\Omega)$. Ist u eine schwache Lösung zu* (3.4.3)*, so erfüllt u die PDE* (3.4.3) *im distributionellen Sinne, das heißt*

$$-\Delta T_u = T_f \quad \text{in } C_0^\infty(\Omega)^*.$$

Ist $u \in H^2(\Omega)$, so gilt

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u + \beta u - g) v \,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Wir definieren nun die Bilinearform $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta \tau(u) \tau(v) \,\mathrm{d}s$$

und die Linearform $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(v) = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g \tau(v) \,\mathrm{d}s.$$

Es gilt

$$|a(u,v)| \leq (1 + \|\beta\|_{L^\infty(\partial\Omega)} c_\tau^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u,v \in H^1(\Omega)$$

und

$$|F(v)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} c_\tau) \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Die Koerzitivität von a folgt aus der verallgemeinerten Poincaré-Friedrichs-Ungleichung (ohne Beweis):

Satz 3.37 (Verallgemeinerte Poincaré-Friedrichs-Ungleichung). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Ferner seien $E \subset \Omega$ und $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit*

$$\int_E 1 \,\mathrm{d}x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_\Gamma 1 \,\mathrm{d}s \neq 0.$$

Dann existieren Konstanten $c_E, c_\Gamma > 0$, so dass gilt

$$\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x \leq c_\Gamma \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \tau(u)^2 \,\mathrm{d}s \right) \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

und

$$\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x \leq c_E \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_E u^2 \,\mathrm{d}x \right) \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Satz 3.38 (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zu (3.4.3)). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ nichtnegativ mit*

$$\beta(s) \geq \beta_0 > 0$$

für fast alle $s \in \Gamma$ und $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit $\int_\Gamma 1 \,\mathrm{d}s \neq 0$. Dann besitzt (3.4.3) zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ genau eine schwache Lösung.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass a koerzitiv ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \beta \tau(u)^2 \,\mathrm{d}s \\
&\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Gamma \beta_0 \tau(u)^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta_0 \int_\Gamma \tau(u)^2 \,\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \min\left\{\frac{1}{2}, \beta_0\right\} c_\Gamma^{-1} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \min\left\{\frac{1}{2}, \beta_0\right\} c_\Gamma^{-1}\right\} (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \quad \forall u \in H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

□

3.4.4. Gemischte Randbedingungen

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Ferner seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial\Omega$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ und $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ mit

$$\int_{\Gamma_i} 1 \, \mathrm{d}s \neq 0 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_1, \\ \partial_\nu u = g & \text{auf } \Gamma_2. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Wir definieren den Raum

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : (\tau u)(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \Gamma_1\}.$$

Satz 3.39. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann ist der Raum $\{H^1_{\Gamma_1}(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}\}$ ein Hilbertraum.*

Beweis. Es sei $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ mit $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$ für einen Grenzwert $u \in H^1(\Omega)$. Da der Spuroperator $\tau : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ stetig ist, gilt

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_1} \underbrace{|\tau(u_k)|^2}_{=0\, \forall k \in \mathbb{N}} \mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} |\tau(u)|^2 \, \mathrm{d}s.$$

Also ist

$$\tau(u) = 0 \quad \text{fast überall auf } \Gamma_1.$$

Mit anderen Worten ist $u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$. Somit ist $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$ und damit ist $\{H^1_{\Gamma_1}(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}\}$ ein Hilbertraum. □

Definition 3.40 (schwache Lösung). Es sei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma_2)$. Eine Funktion $u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ heißt schwache Lösung zu (3.4.4), falls gilt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g v \, \mathrm{d}s \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega).$$

Satz 3.41 (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zu (3.4.4))**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Ferner seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial\Omega$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ und $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ mit*

$$\int_{\Gamma_i} 1 \, \mathrm{d}s \neq 0 \quad \textit{für } i = 1, 2.$$

Dann besitzt (3.4.4) zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$. Es existiert eine von f, g, und u unabhängige Konstante $c > 0$, so dass gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_2)}).$$

Beweis. Wir definieren die Bilinearform $a : H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u,v \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$$

sowie die Linearform $F : H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(v) = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g\tau(v)\,\mathrm{d}s \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega).$$

Offenbar sind $a : H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $F : H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt, denn es gilt

$$|a(u,v)| \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

sowie

$$\begin{aligned} |F(v)| &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_2)}\|\tau(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\le (\|f\|_{L^2(\Omega)} + c_\tau\|g\|_{L^2(\Gamma_2)})\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Koerzitivität von a folgt aus der verallgemeinerten Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

$$\int_\Omega |v|^2 \,\mathrm{d}x \le c_{\Gamma_1}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \tau(v)^2\,\mathrm{d}s\right) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

mit einer von v unabhängigen Konstanten $c_{\Gamma_1} > 0$. Somit gilt

$$\int_\Omega |v|^2\,\mathrm{d}x \le c_{\Gamma_1}\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\ge \frac{1}{2c_{\Gamma_1}}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\ge \min\left\{\frac{1}{2c_{\Gamma_1}}, \frac{1}{2}\right\}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass die Bilinearform a beschränkt und koerzitiv ist sowie dass die Linearform $F \in H^1(\Omega)^*$ ist. Das Lemma von Lax-Milgram liefert also die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ zu (3.4.4). Die Lösung erfüllt $a(u,u) = F(u)$ und daraus folgt

$$\min\left\{\frac{1}{2c_{\Gamma_1}}, \frac{1}{2}\right\}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le a(u,u) = F(u) \le (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_2)}c_\tau)\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Somit erhalten wir

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \max\{1, c_\tau\}\min\left\{\frac{1}{2c_{\Gamma_1}}, \frac{1}{2}\right\}^{-1}(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_2)}).$$

□

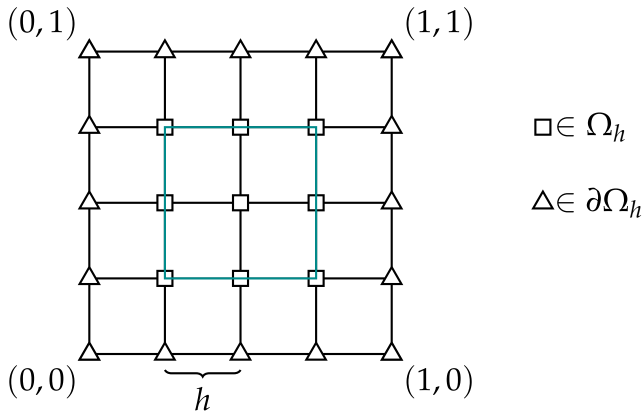
Kapitel 4

Differenzenverfahren

In diesem Kapitel behandeln wir das klassische Differenzenverfahren für die Poisson-Gleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Zur Vereinfachung sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ und wir zerlegen $\overline{\Omega}$ durch endlich viele Quadrate mit Seitenlänge $h = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.



Wir definieren

$$\begin{aligned} \Omega_h &:= \{(ih, jh) : (ih, jh) \in \Omega,\ i, j \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(ih, jh) : i, j \in \{1, \dots, n-1\}\} \end{aligned}$$

sowie

$$\partial\Omega_h := \{(ih, jh) : (ih, jh) \in \partial\Omega,\ i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Mit dieser Diskretisierung lässt sich das Randwertproblem (4) durch das Differenzenverfahren leicht behandeln.

Hierzu verwenden wir den Satz von Taylor für ein 4-mal stetig differenzierbares u:

$$\begin{aligned} u(x+h, y) &= u(x,y) + D_1 u(x,y) h + \frac{1}{2} D_1^2 u(x,y) h^2 + \frac{1}{6} D_1^3 u(x,y) h^3 + \mathcal{O}(h^4), \\ u(x-h, y) &= u(x,y) - D_1 u(x,y) h + \frac{1}{2} D_1^2 u(x,y) h^2 - \frac{1}{6} D_1^3 u(x,y) h^3 + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} D_1^2 u(x,y) &= \frac{1}{h^2}(u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)) + \mathcal{O}(h^2), \\ D_2^2 u(x,y) &= \frac{1}{h^2}(u(x,y-h) - 2u(x,y) + u(x,y+h)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{h^2}(u(x-h,y) + u(x,y-h) - 4u(x,y) + u(x+h,y) + u(x,y+h)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Definition 4.1. Es sei $u \in C^4(\Omega)$, $h \in \mathbb{R}^+$ und $(x,y) \in \Omega$ mit

$$(x \pm h, y), (x, y \pm h) \in \overline{\Omega}.$$

Wir definieren den diskreten Laplace-Operator wie folgt:

$$\Delta_h u(x,y) = \frac{1}{h^2}(u(x-h,y) + u(x,y-h) - 4u(x,y) + u(x+h,y) + u(x,y+h)).$$

Definition 4.2 (Differenzenverfahren (5-Punkte-Stern für (4))). Es sei $h = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Für $i,j = 0,\dots,n$ bestimmen wir die Näherungen der Lösung zu (4) $u(ih, jh) \approx u_{ij}$ aus

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_{ij} &= f(ih, jh) \quad \forall i,j = 1,\dots,n-1, \\ u_{0j} = u_{nj} &= 0 \quad \forall j = 0,\dots,n, \\ u_{i0} = u_{in} &= 0 \quad \forall i = 0,\dots,n, \end{aligned}$$

wobei

$$-\Delta_h u_{ij} = n^2(-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{ij}) \quad \forall i,j = 1,\dots,n-1$$

gilt. Setzen wir

$$u_h := (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1,n-1}, u_{21}, \dots, u_{2,n-1}, \dots, u_{n-1,1}, \dots, u_{n-1,n-1})^T,$$

sowie

$$A_h = n^2 \left(\begin{array}{c|c|c|c} T_{n-1} & -I_{n-1} & & \\ \hline -I_{n-1} & T_{n-1} & \ddots & \\ \hline & \ddots & \ddots & -I_{n-1} \\ \hline & & -I_{n-1} & T_{n-1} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$$

mit

$$T_{n-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

und
$$f_h = (f(h,h), f(h,2h), \dots, f((n-1)h,(n-1)h)),$$
dann führt das Differenzenverfahren auf
$$A_h u_h = f_h.$$

Definition 4.3. Es sei $h = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Wir definieren den Operator
$$K_h : C(\Omega) \to \mathbb{R}^{(n-1)^2}, \quad K_h u := (u(h,h), u(h,2h), \dots, u((n-1)h,(n-1)h)).$$

Für unsere weitere Untersuchung treffen wir jetzt die folgende Annahme:
Es sei $f \in C(\Omega)$ und die Poisson-Gleichung (4) besitzt eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Definition 4.4. Das Differenzenverfahren heißt konvergent, falls gilt:
$$\lim_{h \to 0} \|u_h - K_h u\|_\infty = 0.$$

Existiert eine von h unabhängige Konstante $c > 0$, sowie ein $k \in \mathbb{R}^+$, so dass gilt
$$\|u_h - K_h u\|_\infty \leq c h^k,$$
so heißt das Verfahren konvergent mit *Konvergenzrate* k.

Lemma 4.5. *Unter der Annahme, dass die klassische Lösung zu* (4) *existiere,* $u \in C^4(\overline{\Omega})$, *gilt*
$$\|K_h \Delta u + A_h K_h u\|_\infty \leq \frac{1}{12} h^2 \|u\|_{C^4(\overline{\Omega})}.$$

Beweis. Laut Konstruktion gibt es zu jedem Index $l \in \{1, \dots, (n-1)^2\}$ Indizes $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ mit
$$\begin{aligned}
(K_h \Delta u + A_h K_h u)_l &= D_1^2 u(ih,jh) + D_2^2 u(ih,jh) - \frac{1}{h^2}(u(ih,(j-1)h) + \\
&\quad + u((i-1)h,jh) + u((i+1)h,jh) + u(ih,(j+1)h) - 4u(ih,jh)) \\
&= \frac{2}{4!} h^2 (D_1^4 u(\xi,y) + D_2^4 u(x,\eta)) \\
&\leq \frac{1}{12} h^2 \|u\|_{C^4(\overline{\Omega})}
\end{aligned}$$
mit einer Zwischenstelle $(\xi, \eta) \in \Omega$. $\square$

Lemma 4.6. *Die Matrix* $A_h \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$ *besitzt die Eigenschaft:*
$$A_h z_h \geq 0 \quad \Rightarrow \quad z_h \geq 0.$$

Beweis. Annahme: Die Behauptung wäre falsch, das heißt, es existiert ein Vektor $z_h \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$ mit $A_h z_h \geq 0$ und mit $(z_h)_l < 0$ für ein $l \in \{1, \ldots, (n-1)^2\}$. Sei z_{ij} der kleinste Eintrag des Vektors

$$z_h = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{n-1,n-1})^T.$$

Dann folgt aus $A_h z_h \geq 0$:

$$-z_{i,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j+1} - z_{i+1,j} + 4z_{ij} \geq 0$$

und somit

$$4z_{ij} \geq z_{i,j-1} + z_{i-1,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j} \geq 4z_{ij}.$$

Daher gilt

$$z_{ij} = z_{i,j-1} = z_{i-1,j} = z_{i,j+1} = z_{i+1,j},$$

denn z_{ij} ist der kleinste Eintrag des Vektors z_h. Wiederholen wir dieses Argument für $z_{i-1,j}$, $z_{i,j-1}$, $z_{i+1,j}$ und $z_{i,j+1}$, so erhalten wir

$$z_h = \hat{z}(1, \ldots, 1)^T$$

mit $\hat{z} < 0$. Insgesamt folgt der Widerspruch

$$0 \leq (A_h z_h)_1 = 4\hat{z} - \hat{z} - \hat{z} = 2\hat{z} < 0.$$

□

Lemma 4.7. *Es gilt*

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \quad \forall h = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Beweis. Es sei $z(x, y) = \frac{1}{2}(x - x^2)$ und wir setzen $z_h = K_h z$. Für diesen Vektor gilt

$$\|z_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \tag{$*$}$$

und

$$(A_h z_h)_l = 1. \tag{$**$}$$

Aus Numerik 1 existiert ein $m_h \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$ mit $\|m_h\|_\infty = 1$ und $\|A_h^{-1}\|_\infty = \|A_h^{-1} m_h\|_\infty$. Aus ($**$) erhalten wir

$$A_h(z_h + A_h^{-1} m_h) = A_h z_h + m_h \geq 0,$$
$$A_h(z_h - A_h^{-1} m_h) = A_h z_h - m_h \geq 0,$$

und mit dem vorherigen Lemma folgt

$$z_h \geq -A_h^{-1} m_h,$$
$$z_h \geq A_h^{-1} m_h.$$

Somit gilt

$$(z_h)_l \geq |(A_h^{-1} m_h)_l| \quad \forall l \in \{1, \dots, (n-1)^2\}.$$

Verwenden wir ($*$), dann folgt

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \|A_h^{-1} m_h\|_\infty \leq \|z_h\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

□

Satz 4.8 (Konvergenzaussage für das Differenzenverfahren). *Unter der Annahme, dass die klassische Lösung zu* (4) *existiere und die Regularität $u \in C^4(\overline{\Omega})$ erfülle, konvergiert das Differenzenverfahren mit der Konvergenzordnung $k = 2$, das heißt, es gilt*

$$\|u_h - K_h u\|_\infty = \mathcal{O}(h^2) \quad \textit{für } h \to 0.$$

Mit anderen Worten existiert eine von h unabhängige Konstante $c > 0$, so dass gilt

$$\|u_h - K_h u\|_\infty \leq c h^2 \quad \forall h = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Beweis. Sei $h = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|u_h - K_h u\|_\infty &= \|A_h^{-1}(A_h u_h - A_h K_h u)\|_\infty \\
&= \|A_h^{-1}(f_h - A_h K_h u)\|_\infty \\
&= \|A_h^{-1}(K_h f - A_h K_h u)\|_\infty \\
&\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|-K_h \Delta u - A_h K_h u\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{8}\frac{1}{12} h^2 \|u\|_{C^4(\overline{\Omega})}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung mit $c = \frac{1}{96}\|u\|_{C^4(\overline{\Omega})}$ bewiesen. □

Kapitel 5

Grundkonzepte der Finite-Elemente-Methode

5.1. Galerkin-Verfahren und das Lemma von Céa

Wie im Kapitel 3 bereits diskutiert, lässt sich eine schwache Formulierung eines linearen elliptischen PDE-Modells oft als ein Variationsproblem der Form

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

darstellen. Intuitiv ist es naheliegend, wie man ein solches Variationsproblem numerisch löst:

Man approximiere den Testraum V durch einen endlichdimensionalen Unterraum $V_h \subset V$ und löse

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Diese Idee geht zurück auf Boris Grigorjewitsch Galjorkin (1871 - 1945). In der Literatur wird diese als das Galerkin-Verfahren (Ritz-Galerik-Verfahren) bezeichnet.

Lemma 5.1. *Es sei V ein reeller Hilbertraum und $V_h \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Ferner sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzitive Bilinearform, sowie $F \in V^*$. Dann besitzt das Variationsproblem*

„Finde $u_h \in V_h$, so dass gilt

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.\text{“}$$

genau eine Lösung $u_h \in V_h$.

Beweis. Da V ein Hilbertraum und $V_h \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum ist, so ist V_h ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Die Beschränktheit und die Koerzitivität von $a : V \times V \to \mathbb{R}$ implizieren, dass $a : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ beschränkt und koerzitiv ist. Ferner ist $F \in V_h^*$, denn es gilt $F \in V^*$. Daher folgt die Aussage direkt aus dem Lemma von Lax-Milgram. $\square$

Lemma 5.2 (Lemma von Céa). *Es sei $\{V, (\cdot,\cdot)_V\}$ ein reeller Hilbertraum $V_h \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzitive Bilinearform, sowie $F \in V^*$. Ferner seien $u \in V$ und $u_h \in V_h$ die eindeutigen Lösungen der Variationsprobleme*

$$\begin{aligned} a(u,v) &= F(v) \quad \forall v \in V, \\ a(u_h,v_h) &= F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|u-u_h\|_V \le \frac{c}{\lambda} \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_V,$$

wobei $c \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ die Beschränktheitskonstante bzw. Koerzitivitätskonstante der Bilinearform a bezeichnen.

Beweis. Da $V_h \subset V$ gilt, erfüllt u die Variationsgleichung

$$a(u,v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Folglich gilt

$$a(u-u_h,v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

und somit

$$a(u-u_h,v_h-u_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \tag{$*$}$$

Verwenden wir nun die Beschränktheit und Koerzitivität von a, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda\|u-u_h\|_V^2 &\le a(u-u_h,u-u_h) \\ &= a(u-u_h,u-v_h) + a(u-u_h,v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h,u-v_h) \\ &\le c\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\|u-u_h\|_V \le \frac{c}{\lambda}\|u-v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$$

und somit

$$\|u-u_h\|_V \le \frac{c}{\lambda} \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_V.$$

□

Bemerkungen 5.3.

(i) Das Lemma von Céa ist eine grundlegende Aussage zur Konvergenz sowie Fehlerabschätzung für das Galerkin-Verfahren.

(ii) Die Eigenschaft

$$a(u-u_h,v_h-u_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

heißt *Galerkin-Orthogonalität*.

Fazit 5.4. Für einen endlichdimensionalen Unterraum $V_h \subset V$ liefert das Galerkin-Verfahren die bestmögliche Approximation $u_h \in V_h$ zu u im Unterraum V_h (bis auf die Konstante $\frac{c}{\lambda}$).

Die Hauptfrage ist nun, wie der Unterraum V_h gewählt werden soll. Ein bekannter Ansatz dazu ist die Finite-Elemente-Methode (FEM).

5.2. Finite-Elemente

Definition 5.5 (Philippe G. Chiarlet)**.** Ein *finites Element* ist ein Tripel (K, P_K, Σ_K) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $K \subset \mathbb{R}^n$ ist ein abgeschlossenes und beschränktes Lipschitzgebiet mit $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$ (nichtleeres Inneres).

(ii) P_K ist ein reeller Funktionenraum auf K.

(iii) Σ_K ist eine Menge von linear unabhängigen, linearen Funktionalen

$$\phi_i : \operatorname{dom}(\Sigma_K) \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

mit $N \in \mathbb{N}$ und $P_K \subset \operatorname{dom}(\Sigma_K)$.

Die Funktionale $\phi_i : \operatorname{dom}(\Sigma_K) \to \mathbb{R}$ heißen *Freiheitsgrade* (degress of freedom) oder auch *Knotenfunktionale*.

Bemerkungen 5.6.

(i) Typische Beispiele für K sind einfache geometrische Objekte, wie Dreiecke oder Vierecke im $\mathbb{R}^2$ bzw. Tetraeder oder Hexaeder in $\mathbb{R}^3$.

(ii) Ein typisches Beispiel für P_K ist der Raum aller reeller Polynome.

Definition 5.7 (Unisolvenz)**.** Ein finites Element (K, P_K, Σ_K) heißt *unisolvent*, wenn jedes Element $p \in P_K$ eindeutig durch die Vorgabe der Werte $\phi_i(p) \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, N$ bestimmt ist:

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, N \quad \exists!\, p \in P_K : \phi_i(p) = \alpha_i \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Lemma 5.8. *Es sei (K, P_K, Σ_K) ein unisolventes finites Element. Dann ist der Funktionenraum P_K endlichdimensional mit $\dim(P_K) = N$ (Anzahl der Freiheitsgrade ϕ_i).*

Beweis. Da das finite Element (K, P_K, Σ_K) unisolvent ist, existiert zu jedem $i \in \{1, \ldots, N\}$ genau ein $p_i \in P_K$ mit

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Die Funktionen p_i, $i = 1, \ldots, N$, sind linear unabhängig, denn aus

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n \equiv 0$$

folgt mit der Linearität von ϕ_j, dass

$$\phi_j(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, N$$

gilt. Somit ergibt sich mit $\phi_j(p_i) = \delta_{ij}$:

$$\lambda_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, N.$$

Wir zeigen nun, dass jedes Element $p \in P_K$ die Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(p) p_i$$

besitzt. Sei $p \in P_K$. Wir setzen

$$\alpha_j := \phi_j(p) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, N$$

und

$$q := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i \in P_K.$$

Dann gilt

$$\phi_j(q) = \phi_j\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i\right) = \alpha_j \quad \forall j = 1, \ldots, N.$$

Da aber (K, P_K, Σ_K) unisolvent ist, so gilt

$$p = q.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $\{p_i\}_{i=1}^N$ eine Basis des Funktionenraums P_K bildet.

□

Definition 5.9 (Basis eines finiten Elements)**.** Es sei (K, P_K, Σ_K) ein unisolventes finites Element. Dann heißt $\{p_i\}_{i=1}^N \subset P_K$ mit der Eigenschaft

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, N$$

Basis des finiten Elements (K, P_K, Σ_K). In diesem Fall heißt $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ *Basis des Dualraums von* P_K.

Definition 5.10. Mit $\mathbb{P}_m$ bezeichnen wir den Raum aller reellwertigen Polynome auf $\mathbb{R}^n$ vom Grad $\leq m \in \mathbb{N}$, das heißt,

$$\mathbb{P}_m := \left\{ p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : p = \sum_{|\alpha| \leq m} \gamma_\alpha x^\alpha \right\}.$$

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$, so setzen wir

$$\mathbb{P}_m(K) := \{p|_K : p \in \mathbb{P}_m\}.$$

Bemerkung 5.11. Es gilt

$$\dim(\mathbb{P}_m) = \binom{n+m}{m}.$$

Beispiel 5.12 (lineares finites Element in $\mathbb{R}^1$)**.** Es sei

$$\begin{aligned}
K &= [0,1], \\
P_K &= \mathbb{P}_1[0,1] = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} : p(x) = \beta x + \gamma,\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \\
\Sigma_K &= \{\phi_i,\ i = 1,2 : \phi_1(p) = p(0),\ \phi_2(p) = p(1)\ \forall p \in P_K\}.
\end{aligned}$$

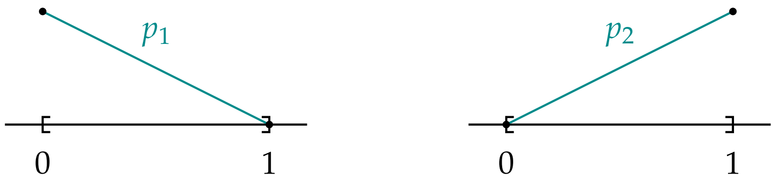
Dieses finite Element (K, P_K, Σ_K) ist unisolvent, denn zu gegebenen Werten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $p \in P_K = \mathbb{P}_1[0,1]$ mit

$$\begin{aligned}
p(0) &= \phi_1(p) = \alpha_1, \\
p(1) &= \phi_2(p) = \alpha_2.
\end{aligned}$$

Die Basis $\{p_i\}_{i=1}^2$ ist eindeutig festgelegt durch

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij}.$$

In diesem Fall erhalten wir



Dieses Beispiel lässt sich auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Dazu verwenden wir die folgende Definition:

Definition 5.13 (n-Simplex)**.** Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *n-Simplex*, wenn es $n+1$ Vektoren $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $a_1, \ldots, a_{n+1}$ nicht in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ liegen und

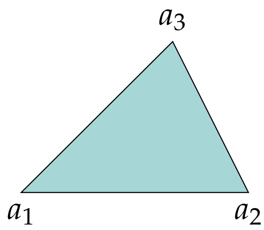
$$K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^n = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j : 0 \le \lambda_j \le 1,\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

In diesem Fall heißen $a_1, \ldots, a_{n+1}$ *Knotenpunkte* (Nodelpunkte, Knoten) von K.

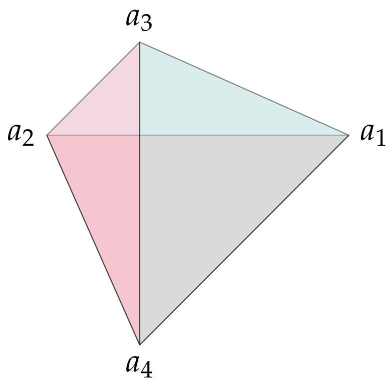
Beispiel 5.14.

(i) Ein 1-Simplex ist ein abgeschlossenes Intervall.

(ii) Ein 2-Simplex ist ein abgeschlossenes Dreieck.



(iii) Ein 3-Simplex ist ein abgeschlossenes Tetraeder.



Beispiel 5.15 (lineares finites Element in $\mathbb{R}^n$)**.** Es sei $K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1}$ ein n-Simplex und

$$\begin{aligned} P_K &= \mathbb{P}_1(K) = \{p : K \to \mathbb{R} : p(x) = (x,a)_{\mathbb{R}^n} + b \text{ mit } a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}\}, \\ \Sigma_K &= \{\phi_i,\ i = 1,\dots,n+1 : \phi_i(p) = p(a_i)\ \forall i = 1,\dots,n+1\}. \end{aligned}$$

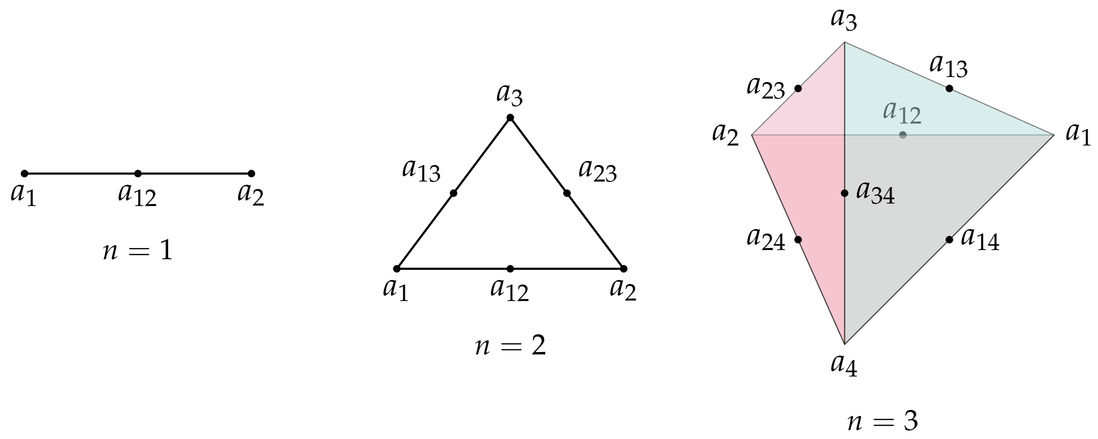
Dieses finite Element (K, P_K, Σ_K) ist unisolvent mit $\dim(P_K) = n+1$.

Beispiel 5.16 (quadratisches finites Element in $\mathbb{R}^n$)**.** Es sei $K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1}$ ein n-Simplex und

$$\begin{aligned} P_K &= \mathbb{P}_2(K), \\ \Sigma_K &= \{\phi_i,\ i = 1,\dots,n+1 : \phi_i(p) = p(a_i)\ \forall i = 1,\dots,n+1\} \\ &\quad \cup \{\phi_{ij},\ 1 \le i < j \le n+1 : \phi_{ij}(p) = p(a_{ij})\ \forall 1 \le i < j \le n+1\}, \end{aligned}$$

mit $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$ für alle $1 \le i < j \le n$. Dieses finite Element (K, P_K, Σ_K) ist unisolvent mit

$$\dim(P_K) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

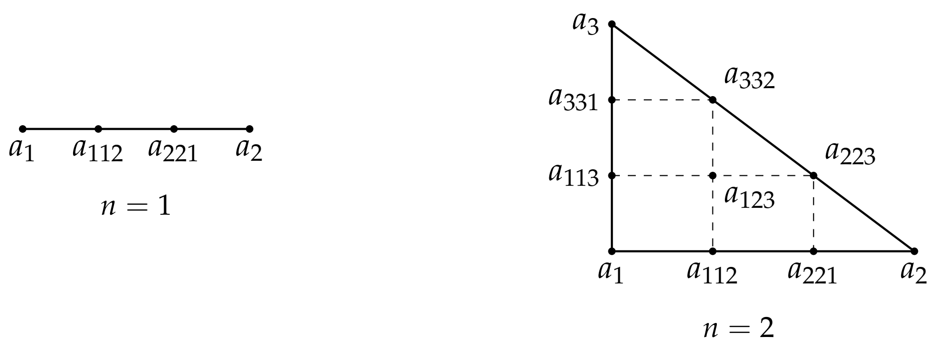


Beispiel 5.17 (kubisches finites Element in $\mathbb{R}^n$)**.** Es sei $K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1}$ ein n-Simplex und

$$\begin{aligned}
&P_K = \mathbb{P}_3(K),\\
&\Sigma_K = \{\phi_i,\ i = 1,\dots,n+1 : \phi_i(p) = p(a_i)\ \forall i = 1,\dots,n+1\}\\
&\qquad \cup \{\phi_{iij},\ i \neq j,\ i,j = 1,\dots,n+1 : \phi_{iij}(p) = p(a_{iij})\ \forall i \neq j,\ i,j = 1,\dots,n+1\}\\
&\qquad \cup \{\phi_{ijk},\ 1 \leq i < j < k \leq n+1 : \phi_{ijk}(p) = p(a_{ijk})\ \forall 1 \leq i < j < k \leq n+1\},
\end{aligned}$$

mit $a_{iij} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j)$ und $a_{ijk} = \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k)$. Dieses finite Element (K, P_K, Σ_K) ist unisolvent mit

$$\dim(P_K) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$



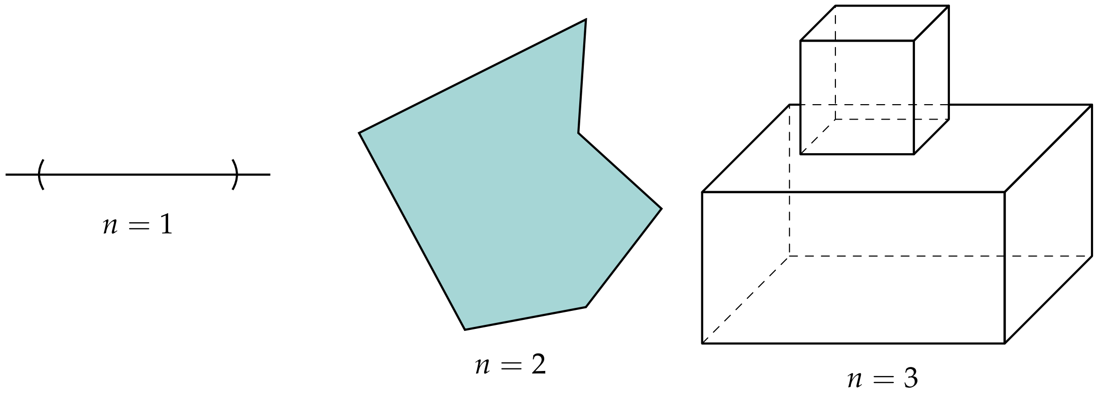
5.3. Der Finite-Elemente-Raum

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(G1) Ist $n = 1$, so ist Ω ein offenes beschränktes Intervall.

(G2) Ist $n = 2$, so ist Ω ein beschränktes polygonales Lipschitzgebiet.

(G3) Ist $n = 3$, so ist Ω ein beschränktes polyedrisches Lipschitzgebiet.



Definition 5.18 (zulässige Triangulierung)**.** Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, erfülle (G1) - (G3). Eine *Triangulierung* $\mathcal{T}_h = \{K_1, \ldots, K_M\}$ von Ω in endlich viele n-Simplexe heißt *zulässig*, falls gilt:

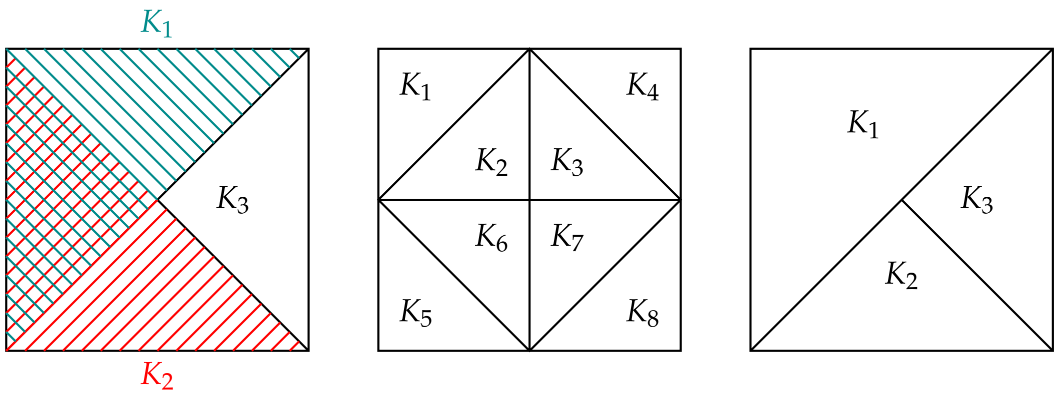
(i) $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ mit $h_K := \operatorname{diam}(K)$ und $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$.

(ii) Gilt $K_i \not\equiv K_j$, so muss $\operatorname{int}(K_i) \cap \operatorname{int}(K_j) = \emptyset$.

(iii) Gilt $K_i \cap K_j = \{x\}$, so muss x ein Knotenpunkt sowohl von K_i als auch von K_j sein.

(iv) Besteht $K_i \cap K_j$ aus mehr als einem Punkt, so muss $K_i \cap K_j$ eine Kante sowohl von K_i als auch von K_j sein.

Beispiel 5.19.



nicht zulässig zulässig nicht zulässig

Definition 5.20 (Finite-Elemente-Raum). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mit den Eigenschaften (G1) - (G3) und $\mathcal{T}_h$ sei eine zulässige Triangulierung von Ω. Dann heißt ein Raum V_h *Finite-Elemente-Raum*, falls gilt:

(i) Für jedes $K \in \mathcal{T}_h$ ist (K, P_K, Σ_K) ein unisolventes finites Element.

(ii) $V_h = \{v_h : \Omega \to \mathbb{R} : v_h|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$.

Definition 5.21 ($H^1(\Omega)$-konformer Finite-Elemente-Raum). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$ mit den Eigenschaften (G1) - (G3) und $\mathcal{T}_h$ sei eine zulässige Triangulierung von Ω. Ein Finite-Elemente-Raum V_h heißt $H^1(\Omega)$*-konform*, falls gilt

$$V_h \subset H^1(\Omega).$$

Wir wollen eine hinreichende Bedingung für $H^1(\Omega)$-konforme Finite-Elemente-Räume herleiten. Dazu verwenden wir die bekannte Greensche Formel für $H^1(\Omega)$-Funktionen.

Lemma 5.22 (Greensche Formel für $H^1(\Omega)$-Funktionen). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ der nach außen gerichtete Normalenvektor auf $\partial\Omega$. Dann gilt für alle $u, v \in H^1(\Omega)$:*

$$\int_\Omega u D_i v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \tau(u)\tau(v)\nu_i \,\mathrm{d}s \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Man verwende die klassische Greensche Formel und die Dichtheit: $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ dicht. □

Satz 5.23. *Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Lipschitzgebiete mit*

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Sigma, \quad |\Sigma| \neq 0.$$

Ferner seien $u_1 \in H^1(\Omega_1)$, $u_2 \in H^1(\Omega_2)$, und

$$u := \begin{cases} u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ u_2 & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

Mit $\tau_1 : H^1(\Omega_1) \to L^2(\partial\Omega_1)$ und $\tau_2 : H^1(\Omega_2) \to L^2(\partial\Omega_2)$ bezeichnen wir die Spuroperatoren. Gilt

$$\tau_1(u_1) = \tau_2(u_2) \quad \text{auf } \Sigma,$$

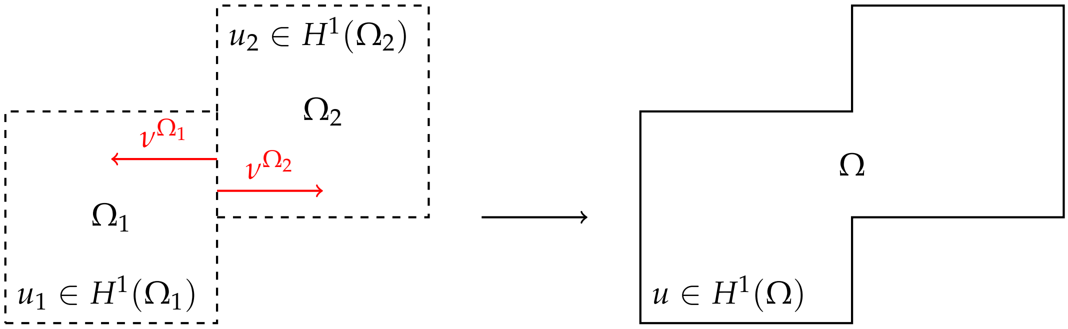
so gilt

$$u \in H^1(\Omega) \quad \text{mit } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma$$

und

$$D_i u = \begin{cases} D_i u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ D_i u_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.



Beweis. Laut Konstruktion ist $u \in L^2(\Omega)$. Wir müssen nur zeigen, dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die schwache Ableitung $D_i u$ existiert und zu $L^2(\Omega)$ gehört. Es sei also $i \in \{1, \dots, n\}$ und $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D_i v \,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_1} u_1 D_i v \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} u_2 D_i v \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_1} D_i u_1 v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_1} \tau_1(u_1) v|_{\partial\Omega_1} \nu_i^{\Omega_1} \,\mathrm{d}s - \int_{\Omega_2} D_i u_2 v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_2} \tau_2(u_2) v|_{\partial\Omega_2} \nu_i^{\Omega_2} \,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Wir definieren

$$L^2(\Omega) \ni w = \begin{cases} D_i u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ D_i u_2 & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

Somit erhalten wir

$$\int_\Omega u D_i v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega w v \,\mathrm{d}x + \left(\int_{\partial\Omega_1} \tau_1(u_1) v|_{\partial\Omega_1} \nu_i^{\Omega_1} \,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_2} \tau_2(u_2) v|_{\partial\Omega_2} \nu_i^{\Omega_2} \,\mathrm{d}s \right).$$

Wir zeigen nun, dass der Randterm verschwindet. Da $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, ist $v(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \Sigma$. Somit gilt

$$\int_{\partial\Omega_1} \tau_1(u_1) v|_{\partial\Omega_1} \nu_i^{\Omega_1} \,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_2} \tau_2(u_2) v|_{\partial\Omega_2} \nu_i^{\Omega_2} \,\mathrm{d}s = \int_\Sigma (\tau_1(u_1)\nu_i^{\Omega_1} + \tau_2(u_2)\nu_i^{\Omega_2}) v|_\Sigma \,\mathrm{d}s = 0,$$

denn laut Voraussetzung gilt $\tau_1(u_1) = \tau_2(u_2)$ auf Σ und laut Definition ist $\nu^{\Omega_1} = -\nu^{\Omega_2}$. Insgesamt gilt

$$\int_\Omega u D_i v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega w v \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Laut Definition ist somit

$$w = \begin{cases} D_i u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ D_i u_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

die i-te schwache Ableitung von u, das heißt, $D_i u = w$. □

Satz 5.24. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mit den Eigenschaften (G1) - (G3). Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω und V_h ein Finite-Elemente-Raum. Gilt*

(i) $P_K \subset H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$ *und*

(ii) $V_h \subset C(\overline{\Omega})$,

so ist V_h $H^1(\Omega)$*-konform, das heißt,* $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Beweis. Es gelten die Bedingungen (i) und (ii). Ferner sei $u_h \in V_h$. Laut (ii) ist $u_h \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$. Wir zeigen nun, dass $D_i u_h$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert und in $L^2(\Omega)$ liegt.
Sei also $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_h D_i v \, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u_h D_i v \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_K D_i u_h v \, dx + \int_{\partial K} \tau_K(u_h) v \nu_i^K \, ds \right) \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K D_i u_h v \, dx,\end{aligned}$$

siehe den Beweis von Satz 5.23. Hieraus folgt

$$D_i u_h = w \in L^2(\Omega)$$

mit

$$w|_K = D_i u_h|_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

□

Definition 5.25. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mit den Eigenschaften (G1) - (G3). Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω. Der (Finite-Elemente-) *Raum aller stetigen stückweise linearen Elemente* ist definiert durch:

(i) Für jedes $K \subset \mathcal{T}_h$ ist $(K, \mathbb{P}_1(K), \Sigma_K)$ ein lineares finites Element (siehe Beispiel 5.15).

(ii) $V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$.

Bemerkung 5.26. Im Folgenden benutzen wir die Schreibweise

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

für den Raum aller stetigen stückweise linearen Elemente. Wir erwähnen also nicht mehr, dass für jedes Element K das Tripel $(K, \mathbb{P}_1(K), \Sigma_K)$ linear ist.

Diese Schreibweise verwenden wir auch für andere Finite-Elemente-Räume, solange es klar ist, welches finite Element (K, P_K, Σ_K) für jede $K \in \mathcal{T}_h$ verwendet wird.

Folgerung 5.27. Der Raum aller stetigen stückweise linearen Elemente

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

ist $H^1(\Omega)$-konform.

Beispiel 5.28. Die folgenden Finite-Elemente-Räume sind ebenson $H^1(\Omega)$-konform:

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_2(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$
$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_3(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Beispiel 5.29. Der Raum aller stückweise konstanten Funktionen

$$V_h = \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in \mathbb{P}_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

ist nicht $H^1(\Omega)$-konform.

Definition 5.30. Ein Finite-Elemente-Raum V_h heißt $H^2(\Omega)$-konform, falls gilt

$$V_h \subset H^2(\Omega).$$

Wir wollen nun eine hinreichende Bedingung für $H^2(\Omega)$-konforme Finite-Elemente-Räume herleiten.

Satz 5.31. *Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Lipschitzgebiete mit*

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Sigma, \quad |\Sigma| \neq 0.$$

Ferner seien $u_1 \in H^2(\Omega_1)$, $u_2 \in H^2(\Omega_2)$, und

$$u := \begin{cases} u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ u_2 & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

Mit $\tau_1 : H^1(\Omega_1) \to L^2(\partial\Omega_1)$ und $\tau_2 : H^1(\Omega_2) \to L^2(\partial\Omega_2)$ bezeichnen wir die Spuroperatoren. Gilt

$$\tau_1(u_1) = \tau_2(u_2) \text{ auf } \Sigma \quad \text{und} \quad \tau_1(D_i u_1) = \tau_2(D_i u_2) \text{ auf } \Sigma$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt

$$u \in H^2(\Omega) \quad \text{mit } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma$$

und

$$D_i u = \begin{cases} D_i u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ D_i u_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \quad \text{und} \quad D_j D_i u = \begin{cases} D_j D_i u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ D_j D_i u_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Aus dem vorherigen Satz gilt $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$D_i u = \begin{cases} D_i u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ D_i u_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Da $D_i u_1 \in H^1(\Omega_1)$ und $D_i u_2 \in H^1(\Omega_2)$, sowie

$$\tau_1(D_i u_1) = \tau_2(D_i u_2) \text{ auf } \Sigma$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, so liefert der vorherige Satz

$$D_i u \in H^1(\Omega) \quad \text{mit} \quad D_j D_i u = \begin{cases} D_j D_i u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ D_j D_i u_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. □

Satz 5.32. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mit den Eigenschaften* (G1) - (G3). *Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω und V_h ein Finite-Elemente-Raum. Gilt*

(i) $P_K \subset H^2(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$ *und*

(ii) $V_h \subset C^1(\overline{\Omega})$,

so ist V_h $H^2(\Omega)$-konform.

5.4. Interpolation und affine Familien von finiten Elementen

Definition 5.33. Es sei (K, P_K, Σ_K) ein unisolventes finites Element mit

$$\Sigma_K := \{\phi_i : \mathrm{dom}(\Sigma_K) \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N \in \mathbb{N}\}.$$

Ferner sei $\{p_i\}_{i=1}^N$ die Basis des finites Elements (K, P_K, Σ_K), definiert durch

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Mit

$$\Pi_K v := \sum_{i=1}^N \phi_i(v) p_i \in P_K \quad \text{für } v \in \mathrm{dom}(\Sigma_K)$$

bezeichnen wir die P_K-*Interpolierende* der Funktion $v \in \mathrm{dom}(\Sigma_K)$. Der *Interpolationsoperator*

$$\Pi_K : \mathrm{dom}(\Sigma_K) \to P_K$$

erfüllt die Projektionseigenschaft

$$\Pi_K p = p \quad \forall p \in P_K,$$

denn wie wir bereits gezeigt haben besitzt jedes Element $p \in P_K$ die Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^N \phi_i(p) p_i.$$

Beispiel 5.34 (lineares finites Element)**.** Es sei $K = \text{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$ ein n-Simplex und (K, P_K, Σ_K) ein lineares finites Element, das heißt,

$$P_K = \mathbb{P}_1(K)$$
$$\Sigma_K = \{\phi_i : \text{dom}(\Sigma_K) \to \mathbb{R}, \;\; i = 1, \dots, n+1 : \phi_i(p) = p(a_i) \;\; \forall i = 1, \dots, n+1\}.$$

Die Wahl

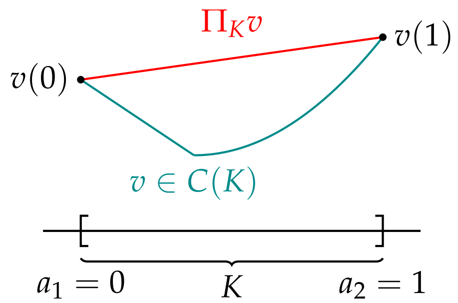
$$\text{dom}(\Sigma_K) = C(K)$$

ist in diesem Fall sinnvoll, denn $\mathbb{P}_1(K) \subset C(K)$ und $\phi_i(v)$ ist wohldefiniert für alle $v \in C(K)$.
Die $\mathbb{P}_1(K)$-Interpolierende einer stetigen Funktion $v \in C(K)$ lautet also

$$\Pi_K v = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(v) p_i = \sum_{i=1}^{n+1} v(a_i) p_i,$$

wobei $\{p_i\}_{i=1}^{n+1}$ die Basis des finiten Elements $(K, \mathbb{P}_1(k), \Sigma_K)$ bezeichnet, also

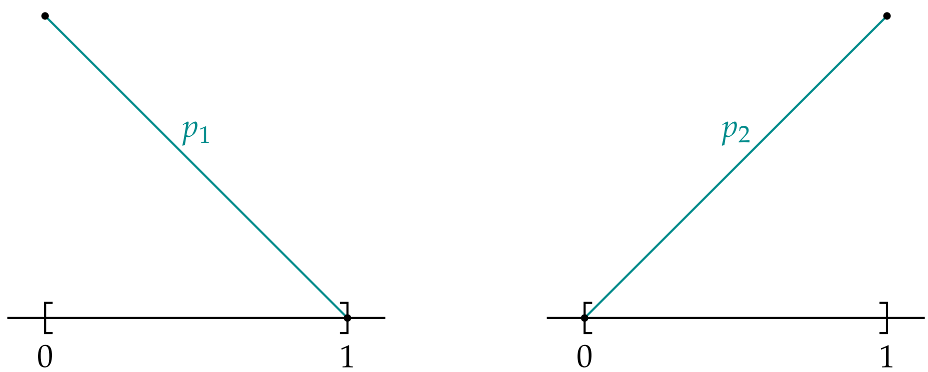
$$p_i(a_j) = \delta_{ij}.$$



Für dieses eindimensionale Beispiel gilt:

$$\Pi_{[0,1]} v = v(0) p_1 + v(1) p_2$$

mit



Beispiel 5.35 (quadratisches finites Element)**.** Es sei $K = \mathrm{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$ ein n-Simplex und (K, P_K, Σ_K) ein quadratisches finites Element, das heißt,

$$\begin{aligned}
P_K &= \mathbb{P}_2(K), \\
\Sigma_K &= \{\phi_i : \mathrm{dom}(\Sigma_K) \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n+1 : \phi_i(p) = p(a_i)\ \forall i = 1, \dots, n+1\} \\
&\quad \cup \{\phi_{ij} : \mathrm{dom}(\Sigma_K) \to \mathbb{R},\ 1 \leq i < j \leq n+1 : \phi_{ij}(p) = p(a_{ij})\ \forall 1 \leq i < j \leq n+1\}
\end{aligned}$$

mit $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$.
Aus dem gleichen Grund wie vorhin wählen wir

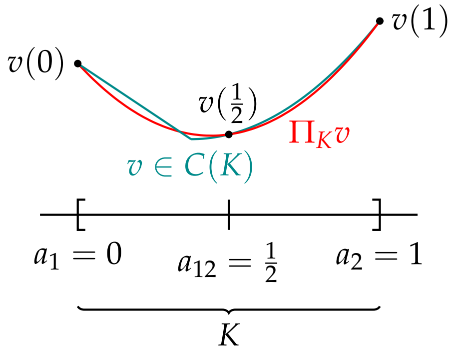
$$\mathrm{dom}(\Sigma_K) = C(K).$$

Dann ist die $\mathbb{P}_2(K)$-Interpolierende einer stetigen Funktion gegeben durch

$$\Pi_K v = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(v) p_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} \phi_{ij}(v) p_{ij} = \sum_{i=1}^{n+1} v(a_i) p_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} v(a_{ij}) p_{ij}$$

mit der Basis $\{p_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{p_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n+1}$, definiert durch

$$\begin{cases} p_i(a_j) = \delta_{ij} & \forall i, j = 1, \dots, n+1, \\ p_{ij}(a_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl} & \forall 1 \leq i < j \leq n+1 \quad \forall 1 \leq k < l \leq n+1. \end{cases}$$



Definition 5.36 (affine Äquivalenz)**.** Zwei finite Elemente $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ und (K, P_K, Σ_K) heißen *affin-äquivalent*, falls eine bijektive affine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, so dass gilt:

(i) $K = F(\hat{K})$,

(ii) $P_K = P_{\hat{K}} \circ F^{-1} = \{p = \hat{p} \circ F^{-1} : K \to \mathbb{R}, \quad \hat{p} \in P_{\hat{K}}\}$,

(iii) $\Sigma_K = \{\phi_i : \phi_i(p) = \hat{\phi}_i(p \circ F), \quad \hat{\phi}_i \in \Sigma_{\hat{K}}\}$,

und $\#\Sigma_K = \#\Sigma_{\hat{K}}$.

Lemma 5.37. *Sind $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ und (K, P_K, Σ_K) zwei unisolvente affin-äquivalente finite Elemente, so gilt*

$$\dim(P_K) = \dim(P_{\hat{K}}) = N = \#\Sigma_K = \#\Sigma_{\hat{K}}.$$

Ist $\{p_i\}_{i=1}^N \subset P_K$ die Basis des finiten Elements (K, P_K, Σ_K), so ist

$$\{\hat{p}_i\}_{i=1}^N \subset P_{\hat{K}}, \quad \hat{p}_i = p_i \circ F$$

die Basis des finiten Elements $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\{\hat{p}_i\}_{i=1}^N \subset P_{\hat{K}}, \quad \hat{p}_i = p_i \circ F$$

die Basis des finiten Elements $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ ist. Nach Definition gilt:

$$\hat{\phi}_j(\hat{p}_i) = \hat{\phi}_j(p_i \circ F) = \phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

□

Beispiel 5.38. Wir betrachten zwei n-Simplexe

$$\hat{K} = \operatorname{conv}\{\hat{a}_j\}_{j=1}^{n+1}, \quad \hat{a}_1 = (0, \ldots, 0)^T, \quad \hat{a}_2 = e_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \ldots, \quad \hat{a}_{n+1} = e_n \in \mathbb{R}^n$$

und

$$K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1}.$$

Ferner seien

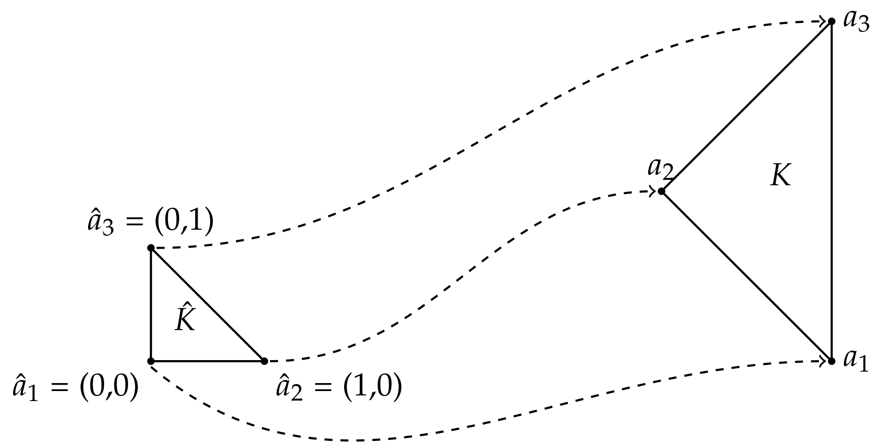
$$P_{\hat{K}} = \mathbb{P}_1(\hat{K}), \quad P_K = \mathbb{P}_1(K),$$

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\hat{K}} &= \{\hat{\phi}_i, \quad i = 1, \ldots, n+1 : \hat{\phi}_i(\hat{p}) = \hat{p}(a_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n+1\}, \\
\Sigma_K &= \{\phi_i, \quad i = 1, \ldots, n+1 : \phi_i(p) = p(a_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n+1\}.
\end{aligned}$$

Dann sind $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ und (K, P_K, Σ_K) affin äquivalent.

Illustration für $n = 2$:



In diesem Fall ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$F\hat{x} = B\hat{x} + b$$

mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} F(0) &= a_1, \\ F(e_j) &= a_{j+1} \quad \forall j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Damit ist

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_{n+1} - a_1 \end{array} \right), \quad b = (a_1).$$

Beispiel 5.39. Es seien $(\hat{K}, \mathbb{P}_2(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ und $(K, \mathbb{P}_2(K), \Sigma_K)$ quadratische finite Elemente mit n-Simplexen

$$\hat{K} = \operatorname{conv}\{\hat{a}_j\}_{j=1}^{n+1}, \quad \hat{a}_1 = (0, \ldots, 0)^T, \quad \hat{a}_2 = e_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \ldots, \quad \hat{a}_{n+1} = e_n \in \mathbb{R}^n$$

und

$$K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1}.$$

Dann sind $(\hat{K}, \mathbb{P}_2(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ und $(K, \mathbb{P}_2(K), \Sigma_K)$ affin-äquivalent.

Beispiel 5.40. Die Elemente $(\hat{K}, \mathbb{P}_1(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ und $(K, \mathbb{P}_2(K), \Sigma_K)$ sind nicht affin-äquivalent.

Lemma 5.41. *Es seien $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ und (K, P_K, Σ_K) zwei unisolvente affin-äquivalente finite Elemente. Ferner seien*

$$\Pi_K : \operatorname{dom}(\Sigma_K) \to P_K \quad \textit{und} \quad \Pi_{\hat{K}} : \operatorname{dom}(\Sigma_{\hat{K}}) \to P_{\hat{K}}$$

die Interpolationsoperatoren der finiten Elemente (K, P_K, Σ_K) *und* $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$. *Ist* $v \in \mathrm{dom}(\Sigma_K)$ *mit* $v \circ F \in \mathrm{dom}(\Sigma_{\hat{K}})$, *so gilt*

$$\Pi_K v = \Pi_{\hat{K}}(v \circ F) \circ F^{-1},$$

wobei

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad Fx = Bx + b,$$

die bijektive affine Abbildung für die affine Äquivalenz zwischen den Elementen (K, P_K, Σ_K) *und* $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ *bezeichnet.*

Beweis. Es sei $v \in \mathrm{dom}(\Sigma_K)$ mit $v \circ F \in \mathrm{dom}(\Sigma_{\hat{K}})$. Dann gilt nach Definition

$$\Pi_K v = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(v) p_i$$

mit der Basis $\{p_i\}_{i=1}^N \subset P_K$, definiert durch

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, N.$$

Aus der Definition der affinen Äquivalenz ergibt sich

$$\Pi_K v = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(v) p_i = \sum_{i=1}^{N} \hat{\phi}_i(v \circ F) p_i$$

und aus Lemma 5.37 ergibt sich

$$(\Pi_K v) \circ F = \sum_{i=1}^{N} \hat{\phi}_i(v \circ F) p_i \circ F = \Pi_{\hat{K}}(v \circ F).$$

□

5.5. Interpolationstheorie im Sobolevraum

In diesem Abschnitt wollen wir eine allgemeine Theorie zum Interpolationsfehler erarbeiten.

Satz 5.42 (Sobolev-Einbettungssatz I)**.** *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt für* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *und* $p \in [1, \infty]$:

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *mit* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, *falls* $k < \frac{n}{p}$.

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *für alle* $q \in [1, \infty)$, *falls* $k = \frac{n}{p}$.

Beispiel 5.43. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega).$$

Somit existiert eine Konstante $c = c(\Omega) > 0$ mit

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

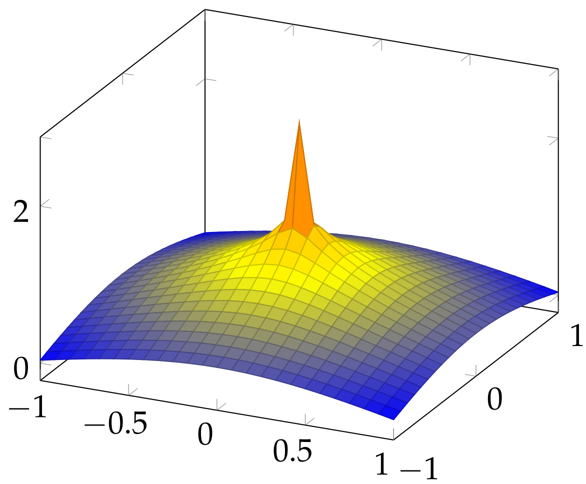
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty).$$

Somit existiert eine Konstante $c = c(q, \Omega) > 0$ mit

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Betrachten wir $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u(x) = \log\left(\log\left(\frac{4}{|x|}\right)\right)$,



so gilt

$$H^1(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Definition 5.44. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Der Raum aller *Hölder-stetigen* Funktionen zum Exponenten $\beta \in (0, 1]$ ist wie folgt definiert:

$$C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) := \{y \in C(\overline{\Omega}) : \exists c > 0 \ \forall x_1, x_2 \in \overline{\Omega} : |y(x_1) - y(x_2)| \leq c\|x_1 - x_2\|_2^\beta\}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) := \{y \in C^k(\overline{\Omega}) : D^\alpha y \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \text{ für alle Multiindizes } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k\}.$$

Bemerkung 5.45. Zusammen mit der Norm

$$\|y\|_{C^{k,\beta}(\overline{\Omega})} := \|y\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x_1,x_2\in\overline{\Omega}\\ x_1\neq x_2}} \frac{|D^\alpha y(x_1) - D^\alpha y(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|_2^\beta}$$

ist $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ ein Banachraum.

Satz 5.46 (Sobolev-Einbettungssatz II)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $p \in [1, \infty]$:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ *für* $\beta = k - \frac{n}{p}$*, falls* $\frac{n}{p} < k < \frac{n}{p} + 1$.

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ *für alle* $\beta \in [0, 1)$*, falls* $k = \frac{n}{p} + 1$.

(iii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega})$*, falls* $k > \frac{n}{p} + 1$.

Beispiel 5.47. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit $p > n$. Dann gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Bemerkung 5.48. Der Beweis für die Sobolev-Einbettungssätze I und II sind im Buch [1] zu finden.

Definition 5.49 (Kompakte Menge im normierten Raum)**.** Es sei X ein normierter Raum.

(i) Eine Menge $U \subset X$ heißt *kompakt*, falls gilt:

$$\forall \{y_j\}_{j=1}^\infty \subset U \; \exists \{y_{j_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{y_j\}_{j=1}^\infty : \lim_{k\to\infty} \|y_{j_k} - y\|_X = 0 \text{ mit } y \in U.$$

Diese Definition der kompakten Menge im normierten Raum ist äquivalent zur Definition der Kompaktheit aus Analysis 2.

(ii) Eine Menge $U \subset X$ heißt *präkompakt*, falls der Abschluss $\overline{U}$ (bzgl. der $\|\cdot\|_X$-Norm) im normierten Raum X kompakt ist.

Definition 5.50. Es seien X, Y normierte Räume.

(i) Eine Abbildung $A : X \to Y$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Menge $U \subset X$ die Menge $A(U) \subset Y$ präkompakt ist ($\overline{A(U)} \subset Y$ ist kompakt).

(ii) Der Raum X ist in Y kompakt eingebettet, falls gilt:

 (i) $X \subset Y$ ist ein Unterraum.

(ii) Die Identitätsabbildung

$$\mathrm{Id} : X \to Y, \quad \mathrm{Id}\, x = x \in X \subset Y,$$

ist linear, stetig und kompakt.

Notation 5.51. Ist X in Y kompakt eingebettet, so schreiben wir

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y.$$

Folgerung 5.52. Es seien X, Y normierte Räume mit $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$. Ist $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ eine beschränkte Folge, so besitzt $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ eine in Y konvergente Teilfolge:

$$\exists \, \{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_j\}_{j=1}^{\infty} : \exists \, x \in Y : \lim_{k\to\infty} \|x_{j_k} - x\|_Y = 0.$$

Beweis. Laut Definition ist $\mathrm{Id} : X \to Y$ kompakt. Somit ist

$$\overline{\mathrm{Id}(U)} \subset Y$$

kompakt mit $U = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$, denn laut Annahme ist U beschränkt. Da $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \overline{\mathrm{Id}(U)}$ ist, so folgt mit der Definition:

$$\exists \{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_j\}_{j=1}^{\infty} : \lim_{j\to\infty} \|x_{j_k} - x\|_Y = 0 \text{ mit } x \in Y.$$

□

Satz 5.53 (Rellich und Kondrachov). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $p \in [1, \infty]$:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ für alle $q \in [1, q^*)$ mit $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, falls $k < \frac{n}{p}$.

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ für alle $q \in [1, \infty)$, falls $k = \frac{n}{p}$.

(iii) $W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$, falls $k > \frac{n}{p}$.

(iv) $W^{k+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,p}(\Omega)$.

Bemerkung 5.54. Die kompakte Einbettung $W^{k+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,p}(\Omega)$ gilt bereits für beschränktes und offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

5.5.1. Bramble-Hilbert-Lemma (James Bramble und Stephen Hilbert)

Wir wollen nun eine fundamentale Abschätzung (Bramble-Hilbert-Lemma) beweisen. Dazu benötigen wir den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach.

Satz 5.55 (Hahn-Banach)**.** *Es sei U ein Unterraum eines normierten Raums X. Ist $f \in U^*$, so existiert eine Fortsetzung $\tilde{f} \in X^*$ mit*

$$\tilde{f}(p) = f(p) \quad \forall p \in U \quad \textit{und} \quad \|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{U^*}.$$

Satz 5.56 (Bramble-Hilbert-Lemma)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $p \in [1, \infty]$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so dass gilt:*

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega) : \inf_{y \in \mathbb{P}_k(\Omega)} \|v + y\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq c|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}$$

mit der Seminorm

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \textit{falls } p \in [1, \infty), \\ \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}, & \textit{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Beweis. Es sei $\{f_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{P}_k(\Omega)^*$ eine Basis des Dualraums von $\mathbb{P}_k(\Omega)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert zu jedem $i = 1, \ldots, N$ ein $\tilde{f}_i \in W^{k+1,p}(\Omega)^*$ mit

$$\tilde{f}_i(y) = f_i(y) \quad \forall y \in \mathbb{P}_k(\Omega).$$

Da $\{f_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{P}_k(\Omega)^*$ eine Basis ist, gilt die folgende Aussage:

$$\forall i = 1, \ldots, N : \tilde{f}_i(y) = 0 \text{ für } y \in \mathbb{P}_k(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Wir zeigen nun: Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit:

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega) : \|v\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq c \left(|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |\tilde{f}_i(v)| \right). \tag{$*$}$$

Die Behauptung folgt unmittelbar aus ($*$): Ist $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, so existiert ein $q \in \mathbb{P}_k(\Omega)$ mit

$$\tilde{f}_i(v + q) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

(Wähle $q = -\sum_{i=1}^N \tilde{f}_i(v) p_i$. Da $\{p_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{P}_k(\Omega)$ Basis von $\mathbb{P}_k(\Omega)$ ist, gilt $\tilde{f}_j(p_i) = \delta_{ij}$.) Die Ungleichung ($*$) liefert dann

$$\begin{aligned} \inf_{y \in \mathbb{P}_k(\Omega)} \|v + y\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} &\leq \|v + q\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \\ &\overset{(*)}{\leq} c \left(|v + q|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |\tilde{f}_i(v + q)| \right) \\ &\leq c \left(|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + |q|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \right) \\ &= c|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Annahme: Ungleichung ($*$) wäre falsch. Somit gilt:

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists\, \tilde{v}_j \in W^{k+1,p}(\Omega) : \|\tilde{v}_j\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} > j \left(|\tilde{v}_j|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} |\tilde{f}_i(\tilde{v}_j)| \right).$$

Hieraus folgt $\tilde{v}_j \not\equiv 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Somit gilt für $v_j := \frac{\tilde{v}_j}{\|\tilde{v}_j\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}}$:

$$\|v_j\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} |v_j|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} |\tilde{f}_j(v_j)| = 0, \qquad (**)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\|\tilde{v}_j\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}}{\|\tilde{v}_j\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}} &> j \frac{1}{\|\tilde{v}_j\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}} \left(|\tilde{v}_j|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} |\tilde{f}_i(\tilde{v}_j)| \right) \\ &= j \left(|v_j|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} |\tilde{f}_i(v_j)| \right) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W^{k+1,p}(\Omega)$ beschränkt ist, so liefert die kompakte Einbettung

$$W^{k+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,p}(\Omega)$$

die Existenz einer in $W^{k,p}(\Omega)$ konvergenten Teilfolge von $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$, das heißt:

$$\exists \{v_{j_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{v_j\}_{j=1}^{\infty} : \lim_{l\to\infty} \|v_{j_l} - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \text{ mit } v \in W^{k,p}(\Omega).$$

Aus ($**$) wissen wir auch

$$\lim_{l\to\infty} \|D^\alpha v_{j_l}\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad \forall |\alpha| = k+1.$$

Somit gilt

$$\lim_{l\to\infty} \|v_{j_l} - v\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} = 0$$

mit $D^\alpha v \equiv 0$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| = k+1$. Da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist, so gilt

$$D^\alpha v \equiv \text{Konst} \quad \forall |\alpha| = k.$$

Somit ist $v \in \mathbb{P}_k(\Omega)$. Andererseits gilt aus ($**$)

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{N} |\tilde{f}_i(v_{j_l})| = 0.$$

Mit $\tilde{f}_i \in W^{k+1,p}(\Omega)^*$ und $v_{j_l} \to v$ in $W^{k+1,p}(\Omega)$ folgt

$$\tilde{f}_i(v) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

und mit $v \in \mathbb{P}_k(\Omega)$ folgt $v = 0$. Das steht im Widerspruch zu $\|v_j\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und wir erhalten insgesamt die Aussage. $\square$

Bemerkung 5.57. Die Konstante $c > 0$ im Bramble-Hilbert-Lemma

$$\inf_{y \in \mathbb{P}_k(\Omega)} \|v + y\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq c|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$$

hängt lediglich von Ω, k und p (aber nicht von v) ab.

Definition 5.58 (Quotientenraum $W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k(\Omega)$)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sowie $p \in [1, \infty]$. Für jedes $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ definieren wir die Äquivalenzklasse

$$[v] := v + \mathbb{P}_k(\Omega) = \{v + y : y \in \mathbb{P}_k(\Omega)\}.$$

Der Quotientenraum $W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k(\Omega)$ ist wie folgt definiert:

$$W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k(\Omega) := \{[v] : v \in W^{k+1,p}(\Omega)\}$$

versehen mit der Norm

$$\|[v]\|_{W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k(\Omega)} := \inf_{y \in \mathbb{P}_k(\Omega)} \|v + y\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.$$

Der Quotientenraum $W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Korollar 5.59. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sowie $p \in [1, \infty]$. Dann definiert die $W^{k+1,p}(\Omega)$-Seminorm*

$$|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=k+1} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \textit{falls } p \in [1, \infty), \\ \max_{|\alpha|=k+1} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}, & \textit{falls } p = \infty \end{cases}$$

eine Norm auf $W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k(\Omega)$.

Beweis. Es gilt

$$|w|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq \|w\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \forall w \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} &= |v + y|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad &\forall y \in \mathbb{P}_k(\Omega) \\ &\leq \|v + y\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad &\forall y \in \mathbb{P}_k(\Omega). \end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} &\leq \inf_{y \in \mathbb{P}_k(\Omega)} \|v + y\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \\ &= \|[v]\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \\ &\leq c(\Omega, k, p)|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k+1,p(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

5.5.2. Fehleranalyse für polynominvariante Operatoren

Definition 5.60. Zwei offene Mengen $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ heißen affin-äquivalent, falls eine bijektive und affine Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad Fx = Bx + b, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

existiert mit

$$\Omega = F(\hat{\Omega}).$$

Satz 5.61. *Seien $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ zwei affin-äquivalente beschränkte Lipschitzgebiete, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sowie $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

$$v \in W^{k,p}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{v} := v \circ F \in W^{k,p}(\hat{\Omega}).$$

(Mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine und bijektive Abbildung, $Fx = Bx + b$, $\Omega = F(\hat{\Omega})$). Ferner existiert eine Konstante $c = c(k, n) > 0$, so dass gilt

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} &\leq c\|B\|_2^k \, |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k,p}(\Omega), \qquad (*) \\ |v|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq c\|B^{-1}\|_2^k \, |\det(B)|^{\frac{1}{p}} |\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} \quad \forall \hat{v} \in W^{k,p}(\hat{\Omega}). \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für $v \in C^k(\overline{\Omega})$. Somit gilt

$$\hat{v} = v \circ F \in C^k(\overline{\hat{\Omega}}),$$

denn $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition der Richtungsableitung gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k$:

$$|D^\alpha \hat{v}(\hat{x})| \leq \|\hat{v}^{(k)}(\hat{x})\|,$$

wobei $\hat{v}^{(k)}(\hat{x})$ die k-te Ableitung von $\hat{v}$ an der Stelle $\hat{x}$ und

$$\|\hat{v}(\hat{x})\| = \sup_{\|\xi\|_2 = 1} |\hat{v}^{(k)}(\hat{x})(\xi_1, \ldots, \xi_k)|$$

bezeichnet. Folglich gilt

$$|\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} = \left(\int_{\hat{\Omega}} \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^p \, \mathrm{d}\hat{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1(k, n) \left(\int_{\hat{\Omega}} \|\hat{v}^{(k)}(\hat{x})\|^p \, \mathrm{d}\hat{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

mit $c_1(k, n) > 0$. Verwenden wir die Kettenregel, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{v}^{(k)}(\hat{x})(\xi_1, \ldots, \xi_k) &= (v \circ F)^{(k)}(\hat{x})(\xi_1, \ldots, \xi_k) \\ &= v^{(k)}(F\hat{x})(B\xi_1, \ldots, B\xi_k) \\ &= v^{(k)}(x)(B\xi_1, \ldots, B\xi_k) \end{aligned}$$

mit $x = F\hat{x}$. Hieraus folgt

$$\|\hat{v}^{(k)}(\hat{x})\| \leq \|v^{(k)}(x)\| \|B\|_2^k.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
|\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} &\leq c_1(k,n) \left(\int_{F^{-1}(\Omega)} \|v^{(k)}(F\hat{x})\|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \|B\|_2^k \\
&= c_1(k,n) \left(\int_{\Omega} \|v^{(k)}(x)\|^p \, |\det(B^{-1})| \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \|B\|_2^k \\
&= c_1(k,n) \|B\|_2^k \, |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \|v^{(k)}(x)\|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c_2(k,n) \|B\|_2^k \, |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= c_2(k,n) \|B\|_2^k \, |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{W^{k,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

mit $c_2(k,n) > 0$, wobei wir im zweiten Schritt den Transformationssatz aus Analysis 3 verwendet haben. Insgesamt gilt

$$|\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} \leq c_2(k,n) \|B\|_2^k \, |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall v \in C^k(\overline{\Omega}) \text{ mit } \hat{v} = v \circ F \in C^k(\overline{\hat{\Omega}}). \tag{$**$}$$

Wir betrachten den Operator

$$G : C^k(\overline{\Omega}) \to W^{k,p}(\hat{\Omega}), \quad v \mapsto v \circ F.$$

Da F affin ist, ist G ebenso affin. Ferner ist G beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ und bzgl. $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})}$ aufgrund von ($**$), denn laut ($**$) gilt

$$\|Gv\|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} \leq c\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall v \in C^k(\overline{\Omega})$$

mit einer von v unabhängigen Konstanten $c > 0$. Aus diesem Grund und wegen der Dichtheit

$$\overline{C^k(\overline{\Omega})} = W^{k,p}(\Omega) \quad (\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} = W^{k,p}(\Omega))$$

besitzt G eine eindeutige beschränkte und affine Fortsetzung

$$\tilde{G} : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\hat{\Omega}).$$

Sei nun $v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset C^k(\overline{\Omega})$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} \|\hat{v}_j - \hat{v}\|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} = 0, \tag{$***$}$$

wobei der letzte Grenzübergang aus der Stetigkeit von $\tilde{G}$ folgt. Aus ($**$) gilt auch

$$|\hat{v}_j|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} \leq c_2(k,n)\|B\|_2^k \,|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}\,|v_j|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit ($***$) erhalten wir beim Grenzfall $j \to \infty$:

$$|\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} \leq c_2(k,n)\|B\|_2^k \,|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}\,|v|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k,p}(\Omega).$$

□

Korollar 5.62. *Seien $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ zwei affin-äquivalente beschränkte Lipschitzgebiete, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sowie $p \in [1,\infty]$. Dann gilt*

$$v \in W^{k,p}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{v} := v \circ F \in W^{k,p}(\hat{\Omega}).$$

(Mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine und bijektive Abbildung, $Fx = Bx + b$, $\Omega = F(\hat{\Omega})$). Ferner existiert eine Konstante $c = c(k,n) > 0$, so dass gilt

$$\begin{aligned}
|\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} &\leq c\|B\|_2^k \,|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}\,|v|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad && \forall v \in W^{k,p}(\Omega),\\
|v|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq c\|B^{-1}\|_2^k \,|\det(B)|^{\frac{1}{p}}\,|\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} \quad && \forall \hat{v} \in W^{k,p}(\hat{\Omega}).
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.63. Für $p < \infty$ haben wir die obige Aussage im vorherigen Satz bereits bewiesen. Hierzu haben wir die Dichtheit $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} = W^{k,p}(\Omega)$ angewendet. Für $p = \infty$ gilt diese Dichtheit nicht.

Beweis. Es sei $p = \infty$ und $v \in W^{k,\infty}(\Omega)$. Da Ω beschränkt ist, ist $v \in W^{k,p}(\Omega)$ für alle $p \in [1,\infty)$, so dass wir den vorherigen Satz anwenden dürfen:

$$\begin{aligned}
&\hat{v} := v \circ F \in W^{k,p}(\hat{\Omega}),\\
&|\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} \leq c\|B\|_2^k \,|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}\,|v|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k,p}(\Omega)
\end{aligned}$$

für alle $p \in [1,\infty)$. Da $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ für alle $m = 0,\ldots,k$ gilt, so haben wir

$$|\hat{v}|_{W^{m,p}(\hat{\Omega})} \leq c(m,n)\|B\|_2^m \,|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}\,|v|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k,p}(\Omega) \qquad (*)$$

für alle $m = 0,\ldots,k$ und $p \in [1,\infty)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}\|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} &\leq \tilde{c}\left(\max_{m=0,\ldots,k}\|B\|_2^m\right)\left(\sup_{p\in[1,\infty)}|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}\right)\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k,p}(\Omega)\\
&\leq K
\end{aligned}$$

für alle $p \in [1,\infty)$. Hieraus ergibt sich (nach Satz 2.13 (iii))

$$\hat{v} \in W^{k,\infty}(\hat{\Omega}).$$

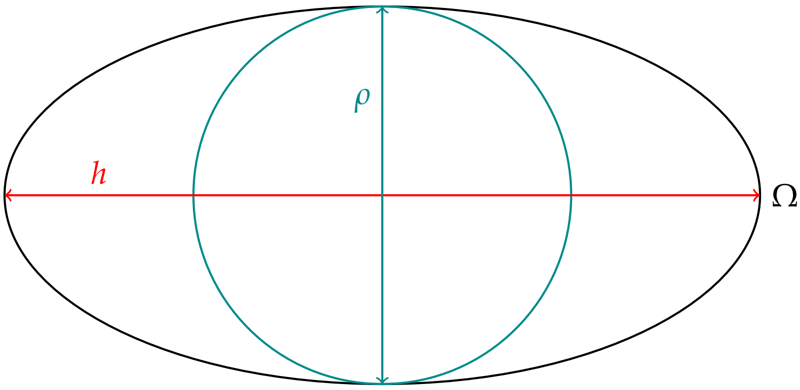
Mit $(*)$ und Satz 2.13 (ii) folgt

$$\begin{aligned}|\hat{v}|_{W^{k,\infty}(\hat{\Omega})} = \lim_{p\to\infty} |\hat{v}|_{W^{k,p}(\hat{\Omega})} &\leq \lim_{p\to\infty} c(k,n)\|B\|_2^k\,|\det(B)|^{-\frac{1}{p}}|v|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &= c(k,n)\|B\|_2^k \lim_{p\to\infty} |v|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &= c(k,n)\|B\|_2^k|v|_{W^{k,\infty}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k,\infty}(\Omega).\end{aligned}$$

□

Mit der obigen Abschätzung können wir eine wichtige Abschätzung für polynominvariante Operatoren ($\mathbb{P}_k(\Omega)$-invariante Operatoren) zeigen. Dazu verwenden wir die folgende Notationen:

$$\begin{aligned}h &= \operatorname{diam}(\Omega) = \sup\{\|x-y\|_2 : x,y \in \Omega\},\\ \hat{h} &= \operatorname{diam}(\hat{\Omega}) = \sup\{\|\hat{x}-\hat{y}\|_2 : x,y \in \hat{\Omega}\},\\ \rho &= \sup\{\operatorname{diam}(S) : S \subset \mathbb{R}^n \text{ ist eine Kugel in } \Omega\},\\ \hat{\rho} &= \sup\{\operatorname{diam}(\hat{S}) : \hat{S} \subset \mathbb{R}^n \text{ ist eine Kugel in } \hat{\Omega}\}.\end{aligned}$$



Satz 5.64. *Es seien $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene affin-äquivalente beschränkte Mengen mit der invertierbaren Abbildung*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad Fx = Bx + b, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad \Omega = F(\hat{\Omega}).$$

Dann gilt

$$\|B\|_2 \leq \frac{h}{\hat{\rho}} \quad \textit{und} \quad \|B^{-1}\|_2 \leq \frac{\hat{h}}{\rho}.$$

Beweis. Es gilt

$$\|B\|_2 = \sup_{\|\xi\|_2=1} \|B\xi\|_2 = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\|_2=\hat{\rho}} \|B\xi\|_2.$$

Es sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\|_2 = \hat{\rho}$. Dann gibt es $\hat{x}, \hat{y} \in \overline{\hat{\Omega}}$ mit

$$\hat{x} - \hat{y} = \xi,$$

denn $\|\xi\|_2 = \hat{\rho} = \sup\{\operatorname{diam}(\hat{S}) : \hat{S} \subset \mathbb{R}^n \text{ ist eine Kugel in } \hat{\Omega}\}$. Nun gilt

$$\|B\xi\|_2 = \|F(\hat{x}) - F(\hat{y})\|_2 \leq h.$$

Somit ergibt sich

$$\|B\|_2 \leq \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\|_2=\rho} \|B\xi\|_2 \leq \frac{h}{\hat{\rho}}.$$

Die andere Abschätzung zeigt man analog. □

Definition 5.65 ($\mathbb{P}_k(\Omega)$-invarianter Operator)**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und X, Y normierte Räume sowie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ein Operator $\Phi : X \to Y$ heißt $\mathbb{P}_k(\Omega)$-invariant, falls gilt:

(i) $\mathbb{P}_k(\Omega) \subset X$,

(ii) $\Phi(p) = p \quad \forall p \in \mathbb{P}_k(\Omega)$.

Beispiel 5.66. Es sei $K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$ ein n-Simplex und $(K, \mathbb{P}_1(K), \Sigma_K)$ ein lineares finites Element. Dann ist der $\mathbb{P}_1(K)$-Interpolationsoperator

$$\Pi_K : C(K) \to \mathbb{P}_1(K), \quad \Pi_K v = \sum_{i=1}^{n+1} v(a_i) p_i,$$

(mit der Basis $\{p_i\}_{i=1}^{n+1}$, definiert durch $p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n+1$) $\mathbb{P}_1(K)$-invariant, denn es gilt $\mathbb{P}_1(K) \subset C(K)$ und $\Pi_K p = p$ für alle $p \in \mathbb{P}_1(K)$.
Analog ist der $\mathbb{P}_m(K)$-Interpolationsoperator $\mathbb{P}_m(K)$-invariant.

Satz 5.67. *Es sei $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $p, q \in [1, \infty]$, so dass*

$$W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega}).$$

Ferner sei $\hat{\Phi} : W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \to W^{m,q}(\hat{\Omega})$ ein linearer, beschränkter und $\mathbb{P}_k(\hat{\Omega})$-invarianter Operator, das heißt,

$$\hat{\Phi}(\hat{p}) = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in \mathbb{P}_k(\hat{\Omega}).$$

Für jedes beschränkte Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, das zu $\hat{\Omega}$ affin-äquivalent ist, definieren wir den Operator

$$\Phi_\Omega : W^{k+1,p}(\Omega) \to W^{m,q}(\Omega), \quad \Phi_\Omega(v) = (\hat{\Phi}(v \circ F)) \circ F^{-1}.$$

Dann existiert eine Konstante $c = c(\hat{\Phi}, \hat{\Omega}, k, m, p, q, n) > 0$, so dass für alle zu $\hat{\Omega}$ affin-äquivalenten Lipschitzgebiete Ω gilt

$$|v - \Phi_\Omega(v)|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq c|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Beweis. Laut Annahme ist $\hat{\Phi}$ $\mathbb{P}_K(\hat{\Omega})$-invariant und somit gilt

$$\begin{aligned}\hat{v} - \hat{\Phi}(\hat{v}) &= \hat{v} - \hat{\Phi}(\hat{v}) + \hat{p} - \hat{\Phi}(\hat{p}) \\ &= (\mathrm{Id} - \hat{\Phi})(\hat{v} + \hat{p}) \quad \forall \hat{v} \in W^{k+1,p}(\Omega) \quad \forall \hat{p} \in \mathbb{P}_k(\hat{\Omega}),\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Id} : W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \to W^{m,q}(\hat{\Omega})$ die Identitätsabbildung bezeichnet. Aufgrund der stetigen Einbettung $W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega})$ ist $\mathrm{Id} : W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \to W^{m,q}(\hat{\Omega})$ beschränkt (stetig). Demzufolge gilt

$$\begin{aligned}\|\hat{v} - \hat{\Phi}(\hat{v})\|_{W^{m,q}(\hat{\Omega})} &= \|(\mathrm{Id} - \hat{\Phi})(\hat{v} + \hat{p})\|_{W^{m,q}(\hat{\Omega})} \\ &\leq c(\hat{\Phi}, \hat{\Omega}, k, m, p, q)\|\hat{v} + \hat{p}\|_{W^{k+1,q}(\hat{\Omega})} \quad \forall \hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \quad \forall \hat{p} \in \mathbb{P}_k(\hat{\Omega}).\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}\|\hat{v} - \hat{\Phi}(\hat{v})\|_{W^{m,q}(\hat{\Omega})} &\leq c(\hat{\Phi}, \hat{\Omega}, k, m, p, q) \inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_K(\hat{\Omega})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{W^{k+1,p}(\hat{\Omega})} \\ &\overset{\text{Lemma 5.56}}{\leq} c|\hat{v}|_{W^{k+1,p}(\hat{\Omega})} \quad \forall \hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), \qquad (*)\end{aligned}$$

wobei $c = c(\hat{\Phi}, \hat{\Omega}, k, m, p, q) > 0$ eine von $\hat{v}$ unabhängige Konstante ist. Andererseits gilt für $\hat{v} = v \circ F$ mit $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$:

$$\underbrace{\hat{v} - \hat{\Phi}(\hat{v})}_{=:\hat{w} \in W^{m,q}(\hat{\Omega})} = v \circ F - \hat{\Phi}(v \circ F) = \underbrace{(v - \Phi_\Omega(v))}_{=:w \in W^{m,q}(\Omega)} \circ F,$$

so dass das vorherige Korollar 5.62 (mit $v = w$ bzw. $\hat{v} = \hat{w}$) liefert für alle $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}|v - \Phi_\Omega(v)|_{W^{m,q}(\Omega)} &\leq c(m,n)\|B^{-1}\|_2^m \, |\det(B)|^{\frac{1}{q}} |\hat{v} - \hat{\Phi}(\hat{v})|_{W^{m,q}(\hat{\Omega})} \\ &\overset{(*)}{\leq} c\|B^{-1}\|_2^m \, |\det(B)|^{\frac{1}{q}} |\hat{v}|_{W^{k+1,p}(\hat{\Omega})} \\ &\overset{\text{Lemma 5.56}}{\leq} c\|B^{-1}\|_2^m \, |\det(B)|^{\frac{1}{q}} \|B\|_2^{k+1} \, |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$|v - \Phi_\Omega(v)|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq c\|B^{-1}\|_2^m \|B\|_2^{k+1} \, |\det(B)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$$

mit $c = c(\hat{\Phi}, \hat{\Omega}, k, m, p, q, n) > 0$. Darüber hinaus gilt nach Satz 5.64

$$\|B\|_2 \leq \frac{h}{\hat{\rho}} \quad \text{und} \quad \|B^{-1}\|_2 \leq \frac{\hat{h}}{\rho}.$$

Hieraus ergibt sich

$$|v - \Phi_\Omega(v)|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq c\frac{h^{k+1}}{\rho^m} \, |\det(B)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Der Term $|\det(B)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ lässt sich mit dem Transformationssatz wie folgt abschätzen:

$$|\Omega| = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}x = \int_{F(\hat{\Omega})} 1\,\mathrm{d}x = \int_{\hat{\Omega}} |\det(B)|\,\mathrm{d}\hat{x} = |\det(B)||\hat{\Omega}|.$$

Somit ist

$$|\det(B)| = \frac{|\Omega|}{|\hat{\Omega}|}.$$

Es gilt also

$$|v - \Phi_\Omega(v)|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq c\frac{h^{k+1}}{\rho^m}|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$$

mit einer von v und Ω unabhängigen Konstanten $c = c(\hat{\Phi}, \hat{\Omega}, k, m, p, q, n) > 0$. $\square$

5.5.3. Anwendung auf Interpolationsoperatoren von finiten Elementen

Sind zwei unisolvente finite Elemente $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ und (K, P_K, Σ_K) affin-äquivalent, so gilt

$$\Pi_K(v) = \Pi_{\hat{K}}(v \circ F) \circ F^{-1} \quad (K = F(\hat{K})) \tag{$*$}$$

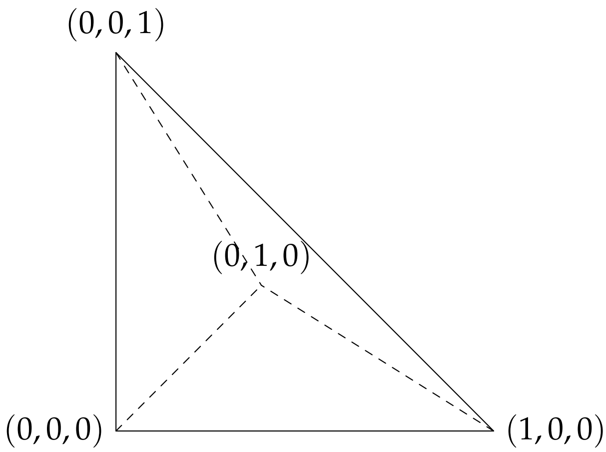
für alle $v \in \mathrm{dom}(\Sigma_K)$ mit $v \circ F \in \mathrm{dom}(\Sigma_{\hat{K}})$. Hierbei bezeichnen

$$\Pi_{\hat{K}} : \mathrm{dom}(\Sigma_{\hat{K}}) \to P_{\hat{K}} \quad \text{bzw.} \quad \Pi_K : \mathrm{dom}(\Sigma_K) \to P_K$$

die Interpolationsoperatoren von $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ bzw. (K, P_K, Σ_K). Wählen wir $\hat{\Phi} = \Pi_{\hat{K}}$ und $\Phi_\Omega = \Pi_K$, so lässt sich aufgrund von $(*)$ der im vorherigen Abschnitt bewiesene Satz 5.67 anwenden. Genauer wenden wir den Satz exemplarisch auf lineare finite Elemente an. Dazu wählen wir das lineare finite Referenzelement

$$\hat{K} = \mathrm{conv}\{\hat{a}_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \{1,2,3\}, \quad \hat{a}_1 = 0, \quad \hat{a}_{j+1} = e_j \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Illustration in 3D:



Ferner ist

$$
\begin{aligned}
&P_{\hat{K}} = \mathbb{P}_1(\hat{K}),\\
&\Sigma_{\hat{K}} = \{\phi_j : C(\hat{K}) \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n+1 : \phi_j(p) = p(\hat{a}_j) \quad \forall j = 1, \dots, n+1\}.
\end{aligned}
$$

Der $\mathbb{P}_1(\hat{K})$-Interpolationsoperator ist wie folgt definiert:

$$
\Pi_{\hat{K}} : C(\hat{K}) \to \mathbb{P}_1(\hat{K}), \quad \Pi_{\hat{K}} v = \sum_{j=1}^{n+1} v(\hat{a}_j)\hat{p}_j,
$$

mit der Basis $\{\hat{p}_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{P}_1(\hat{K})$, definiert durch

$$
\hat{p}_j(\hat{a}_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n+1.
$$

Wir wenden nun den Satz 5.67 mit $p = q = 2$, $k = 1$, $0 \leq m \leq 2$, $\hat{\Omega} = \hat{K}$ und

$$
\hat{\Phi} = \Pi_{\hat{K}} : H^2(\hat{K}) \to H^m(\hat{K})
$$

an. Beachte, dass $H^2(\hat{K}) \hookrightarrow C(\hat{K})$ für $n \in \{1, 2, 3\}$ gilt. Somit haben wir

$$
\Pi_{\hat{K}} : H^2(\hat{K}) \subset C(\hat{K}) \to \mathbb{P}_1(\hat{K}) \subset H^m(\hat{K}).
$$

Wir müssen zeigen, dass $\Pi_{\hat{K}} : H^2(\hat{K}) \to H^m(\hat{K})$ linear, beschränkt und $\mathbb{P}_1(\hat{K})$-invariant ist. Es bleibt nur noch die Beschränktheit nachzuweisen. Dazu sei $v \in H^2(\hat{K})$. Dann gilt laut Definition

$$
\begin{aligned}
\|\Pi_{\hat{K}} v\|_{H^m(\hat{K})} = \left\| \sum_{i=1}^{n+1} v(\hat{a}_i)\hat{p}_i \right\|_{H^m(\hat{K})} &\leq \sum_{i=1}^{n+1} |v(\hat{a}_i)| \|\hat{p}_i\|_{H^m(\hat{K})}\\
&\leq \left(\max_{i=1,\dots,n+1} \|\hat{p}_i\|_{H^m(\hat{K})} \right) (n+1) \|v\|_{C(\hat{K})}\\
&\leq \left(\max_{i=1,\dots,n+1} \|\hat{p}_i\|_{H^m(\hat{K})} \right) (n+1) c \|v\|_{H^2(\hat{K})}\\
&=: K \|v\|_{H^2(\hat{K})},
\end{aligned}
$$

wobei wir die stetige Einbettung $H^2(\hat{\Omega}) \hookrightarrow C(\hat{\Omega})$ angewendet haben. Beachte, dass $H^2(\hat{\Omega}) \hookrightarrow C(\hat{\Omega})$ für $n \geq 4$ nicht mehr gilt. Insgesamt ist $\Pi_{\hat{K}} : H^2(\hat{\Omega}) \to H^m(\hat{\Omega})$ ($m \in \{0, 1, 2\}$) linear, beschränkt und $\mathbb{P}_1(\hat{K})$-invariant. Zusammen mit ($*$) sehen wir, dass die Voraussetzungen des im vorherigen Abschnittes bewiesen Satzes 5.67 erfüllt sind. Somit erhalten wir für jedes lineare finite Element $(K, \mathbb{P}_1(K), \Sigma_K)$ mit einem n-Simplex $K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$ die folgende Abschätzung:

$$
|v - \Pi_K v|_{H^m(K)} \leq c(m, n) \frac{h_K^2}{\rho_K^m} |v|_{H^2(K)} \quad \forall v \in H^2(K).
$$

Hierbei bezeichnet $\Pi_K v = \sum_{j=1}^{n+1} v(a_j) p_j$ den $\mathbb{P}_1(K)$-Interpolationsoperator, und

$$
\begin{aligned}
&h_K = \operatorname{diam}(K),\\
&\rho_K = \sup\{\operatorname{diam}(S) : S \subset \mathbb{R}^n \text{ist eine Kugel in } K\}.
\end{aligned}
$$

Korollar 5.68. *Es sei $K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$, ein n-Simplex, $m \in \{0,1,2\}$. Dann gilt für den $\mathbb{P}_1(K)$-Interpolationsoperator*

$$|v - \Pi_K v|_{H^m(K)} \leq c(m,n)\frac{h_K^2}{\rho_K^m}|v|_{H^2(K)} \quad \forall v \in H^2(K)$$

mit einer von v und K unabhängigen Konstanten $c(m,n) > 0$.

5.5.4. Anwendung auf den Finiten-Elemente-Raum aller stetigen und stückweise linearen Funktionen

Definition 5.69. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$, mit den Eigenschaften (G1) - (G3). Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω. Für jedes Element $K \in \mathcal{T}_h$ setzen wir

$$\begin{aligned} h_K &= \operatorname{diam}(K), \\ \rho_K &= \sup\{\operatorname{diam}(S) : S \subset \mathbb{R}^n \text{ist eine Kugel in } K\}, \\ h &= \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K. \end{aligned}$$

Die Triangulierung heißt:

(i) *quasiuniform* (regulär), falls gilt:

$$\exists\, \sigma > 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h : \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma;$$

(ii) *uniform*, falls gilt:

$$\exists\, \sigma > 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h : \frac{h}{\rho_K} \leq \sigma.$$

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$, mit den Eigenschaften (G1) - (G3) und $\mathcal{T}_h$ sei eine zulässige und quasiuniforme Triangulierung von Ω. Wir betrachten den Raum aller stetigen und stückweise linearen Funktionen

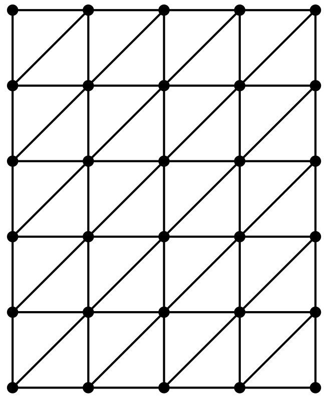
$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Mit

$$\mathcal{N}_h := \{a_j \in \overline{\Omega}, \quad j = 1, \ldots, M_h\}$$

bezeichnen wir die Menge aller paarweise verschiedenen Knotenpunkte (Nodalpunkte), das heißt,

$$\forall K \in T_h \quad \exists\, \{a_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathcal{N}_h : K = \operatorname{conv}\{a_j\}_{j=1}^{n+1}.$$



Ferner bezeichnet

$$\Sigma_h = \{\phi_{hj} : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, M_h : \phi_{hj}(v) = v(a_j) \quad \forall j = 1, \ldots, M_h\}$$

die Menge aller globalen Freiheitsgrade (Knotenfunktionale). Mit $\{p_{hj}\}_{j=1}^{M_h}$ bezeichnen wir die (Nodal-) Basis von V_h, definiert durch

$$\phi_{hi}(p_{hj}) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, M_h \quad \Leftrightarrow \quad p_{hj}(a_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, M_h.$$

Wir definieren den (globalen) V_h-Interpolationsoperator wie folgt:

$$\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to V_h, \quad \Pi_h v = \sum_{j=1}^{M_h} v(a_j) p_{hj}.$$

Offenbar gilt

$$(\Pi_h v)|_K = \Pi_K v \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \forall v \in C(\overline{\Omega}),$$

wobei $\Pi_K : C(K) \to \mathbb{P}_1(K)$ den $\mathbb{P}_1(K)$-Interpolationsoperator bezeichnet.

Bemerkung 5.70. Der Finite-Elemente-Raum

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

ist eindeutig durch die Knotenpunkte (Nodalpunkte) festgelegt. Deshalb heißt V_h auch Nodal-Finite-Elemente-Raum (Lagrangescher Finite-Elemente-Raum).

Satz 5.71. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mit den Eigenschaften* (G1) - (G3). *Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige und quasiuniforme Triangulierung von Ω sowie*

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Dann existiert eine Konstante $c = c(m, n, \sigma) > 0$, so dass gilt

$$|v - \Pi_h v|_{H^m(\Omega)} \leq c h^{2-m} |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

für $m \in \{0, 1\}$.

Beweis. Es sei $v \in H^2(\Omega)$ und $m \in \{0,1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|v - \Pi_h v|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_h v|^2_{H^m(K)} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_K v|^2_{H^m(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} c(m,n) \frac{h_K^4}{\rho_K^{2m}} |v|^2_{H^2(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} c(m,n) \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right)^{2m} h_K^{2(2-m)} |v|^2_{H^2(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} c(m,n) \sigma^{2m} h_K^{2(2-m)} |v|^2_{H^2(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c(m,n) \sigma^m h^{2-m} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|^2_{H^2(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c(m,n,\sigma) h^{2-m} |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega).
\end{aligned}$$

□

Korollar 5.72. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$, mit den Eigenschaften (G1) - (G3). Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige und quasiuniforme Triangulierung von Ω,*

$$V_h = \{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

sowie $h \in (0,1]$. Dann existiert eine Konstante $c = c(n,\sigma) > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c h^2 |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad \forall h \in \mathbb{R}^+, \\
\|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} &\leq c h |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad \forall h \in (0,1].
\end{aligned}$$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass es Konstanten $c_1(n,\sigma), c_2(n,\sigma) > 0$ gibt mit

$$\begin{aligned}
\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_1(n,\sigma) h^2 |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad \forall h \in \mathbb{R}^+, \\
\|\nabla v - \nabla \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_2(n,\sigma) h |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad \forall h \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für $h \in (0,1]$

$$\begin{aligned}
\|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|v - \Pi_h v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v - \nabla \Pi_h v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (c_1^2 h^4 |v|^2_{H^2(\Omega)} + c_2^2 h^2 |v|^2_{H^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(2 \max\{c_1, c_2\}^2 h^2 |v|^2_{H^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2} \max\{c_1, c_2\} h |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega).
\end{aligned}$$

□

Kapitel

6 Finite-Elemente-Methode für lineare elliptische Variationsprobleme

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mit den Eigenschaften (G1) - (G3). Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige und quasiuniforme Triangulierung von Ω mit $h \in (0, 1]$. Wir definieren die Finite-Elemente-Räume

$$\begin{aligned} V_h &:= \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega), \\ V_{0h} &:= \{v_h \in V_h : v_h(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega\} \subset H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Poisson-Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \quad\; u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit einer vorgegebenen Funktion $f \in L^2(\Omega)$. Die Variationsformulierung lautet: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass gilt

$$a(u, v) = F_f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{P}$$

mit einer beschränkten und koerzitiven Bilinearform

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x$$

und einem beschränkten und linearen Funktional

$$F_f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad F_f(v) := \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x.$$

Das Lemma von Lax-Milgram liefert die Existenz einer eindeutigen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (P). Wir untersuchen die numerische Lösung von (P) mittels der Finite-Elemente-Methode: Finde $u_h \in V_{0h}$, so dass gilt

$$a(u_h, v_h) = F_f(v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}. \tag{P_h}$$

Es handelt sich also um ein Galerkin-Verfahren mit $H_0^1(\Omega)$-konformen Finite-Elemente-Räumen. Das Lemma von Lax-Milgram liefert ebenso die Existenz einer eindeutigen Lösung $u_h \in V_{0h}$ für die Aufgabe (P_h). Aus dem Lemma von Céa gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega) \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

mit einer von Ω abhängigen Konstanten $c(\Omega) > 0$.

6.1. Konvergenz und Fehlerabschätzungen

Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to V_h, \quad \Pi_h v = \sum_{i=1}^{M_h} v(a_i) p_{hi}$$

den V_h-Interpolationsoperator. Hierbei sind $a_i \in \mathcal{N}_h$ Knotenpunkte (Nodalpunkte) sowie $\{p_{hi}\}_{i=1}^{M_h} \subset V_h$ die Nodalbasis von $\mathcal{N}_h$, definiert durch

$$p_{hi}(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, M_h, \quad a_j \in \mathcal{N}_h.$$

Satz 6.1 (Konvergenz). *Es gilt*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Da laut Definition $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist, so gibt es ein $z \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|u - z\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} c(\Omega)^{-1} \tag{$*$}$$

mit der aus dem Lemma von Céa definierten Konstanten $c(\Omega) > 0$. Aus der Eigenschaft des V_h-Interpolationsoperators gilt

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq c(n, \sigma) h |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

mit einer festen Konstanten $c(n, \sigma) > 0$. Demzufolge finden wir ein $h(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $h \in (0, h(\varepsilon)]$ gilt

$$\|z - \Pi_h z\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} c(\Omega)^{-1}. \tag{$**$}$$

Kombinieren wir ($*$) und ($**$) zusammen mit dem Lemma von Céa, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq c(\Omega) \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq c(\Omega) \|u - \Pi_h z\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq c(\Omega) \left(\|u - z\|_{H^1(\Omega)} + \|z - \Pi_h z\|_{H^1(\Omega)} \right) \\
&\leq \varepsilon \quad \forall h \in (0, h(\varepsilon)].
\end{aligned}$$

□

Satz 6.2 (Fehlerabschätzung für (P_h) bzgl. der $H^1(\Omega)$-Norm). *Die Lösung u von* (P) *erfülle $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $c = c(\Omega, n, \sigma) > 0$, so dass gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch|u|_{H^2(\Omega)} \quad \forall h \in (0,1].$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Lemma von Céa sowie der Fehlerabschätzung für den V_h-Interpolationsoperator Π_h:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq c(\Omega) \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c(\Omega, n, \sigma) h |u|_{H^2(\Omega)} \quad \forall h \in (0,1].\end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.3. Ist Ω zusätzlich konvex, so erfüllt die Lösung des Variationsproblems (P) die höhere Regularität $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Satz 6.4. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches konvex oder $C^{1,1}$ ist. Dann besitzt die Poisson-Gleichung*

$$\begin{cases} -\Delta y = f & \textit{in } G, \\ \quad\; y = 0 & \textit{auf } \partial G \end{cases}$$

zu jedem $f \in L^2(G)$ genau eine schwache Lösung $y \in H^2(G) \cap H_0^1(G)$. Die Abbildung

$$f \mapsto y, \quad L^2(G) \to H^2(G) \cap H_0^1(G)$$

ist linear, stetig und bijektiv.

Beweis. Für den Beweis des Satzes verweisen wir auf Grisvard [4]. □

Korollar 6.5. *Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches konvex oder $C^{1,1}$ ist, dann gilt*

$$\begin{aligned}\|y\|_{H^2(G)} &\leq c(G) \|\Delta y\|_{L^2(G)} \\ &= c(G) \left(\int_G \left| \sum_{j=1}^n D_j^2 y \right|^2 \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall y \in H^2(G) \cap H_0^1(G).\end{aligned}$$

Beweis. Laut Grisvard [4] gilt

$$\|y\|_{H^2(G)} \leq c(G) \|f\|_{L^2(G)} = c(G) \|\Delta y\|_{L^2(G)} \quad \forall y \in H^2(G) \cap H_0^1(G).$$

□

6.2. Aubin-Nitsche-Lemma

Unser Ziel ist es, eine Fehlerabschätzung für (P_h) bzgl. der $L^2(\Omega)$-Norm herzuleiten. Dazu verwenden wir den Dualitätstrick (Aubin-Nitsche-Lemma, Nitsche-Trick). Hierzu betrachten wir ein allgemeineres Problem. Es seien $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ und $\{V, (\cdot,\cdot)_V\}$ reelle Hilberträume mit

$$V \hookrightarrow H \quad \text{und} \quad \overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H.$$

Für jedes $f \in H$ definieren wir das Funktional

$$F_f : V \to \mathbb{R}, \quad F_f(v) = (f, v)_H.$$

Offenbar ist F_f linear. Ferner gilt

$$|F_f(v)| = |(f,v)_H| \le \|f\|_H \|v\|_H \le c\|f\|_H \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Somit ist $F_f \in V^*$. Beachte, dass die Abbildung

$$f \mapsto F_f, \quad H \to V^*$$

injektiv ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} F_f(v) = 0 \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad (f,v)_H = 0 \quad \forall v \in V \quad &\Leftrightarrow \quad (f,v)_H = 0 \quad \forall v \in H \\ &\Leftrightarrow \quad f = 0. \end{aligned}$$

Satz 6.6 (Aubin-Nitsche-Lemma)**.** *Es seien $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ und $\{V, (\cdot,\cdot)_V\}$ reelle Hilberträume mit*

$$V \hookrightarrow H \quad \textit{und} \quad \overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H.$$

Ferner sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzitive Bilinearform, $V_h \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum und $f \in H$. Dann gilt für die Lösungen von

$$\begin{aligned} a(u,v) &= F_f(v) \quad && \forall v \in V, \\ a(u_h, v_h) &= F_f(v_h) \quad && \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

die folgende Abschätzung:

$$\|u - u_h\|_H \le M\|u-u_h\|_V \left(\sup_{g \in H\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|w(g) - v_h\|_V \right).$$

Hierbei bezeichnet M die Beschränktheitskonstante von a und $w(g) \in V$ die Lösung von

$$a(v,w) = (g,v)_H \quad \forall v \in V.$$

Bemerkung 6.7. Die obige Variationsgleichung heißt *adjungierte Gleichung* (*duale Gleichung*). Beachte, dass $a(v,w)$ und $a(w,v)$ im Allgemeinen nicht übereinstimmen, da a nicht unbedingt symmetrisch sein muss.

Beweis. Zu jedem $g \in H$ besitzt das duale Problem

$$a(v, w) = (g, v)_H \quad \forall v \in V$$

genau eine Lösung $w = w(g) \in V$ (Lemma von Lax-Milgram). Insbesondere gilt

$$a(u - u_h, w) = (g, u - u_h)_H.$$

Andererseits gilt

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Somit ist

$$a(u - u_h, w(g) - v_h) = (g, u - u_h)_H \quad \forall v_h \in V_h \quad \forall g \in H.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |(g, u - u_h)_H| &= |a(u - u_h, w(g) - v_h)| \\ &\leq M \|u - u_h\|_V \|w(g) - v_h\|_V \quad \forall g \in H \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{|(g, u - u_h)_H|}{\|g\|_H} \leq M \|u - u_h\|_V \left(\frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|w(g) - v_h\|_V \right) \quad \forall g \in H \setminus \{0\}.$$

Nach dem Darstellungssatz von Riesz gilt

$$\|u - u_h\|_H = \|(\cdot, u - u_h)_H\|_{H^*} = \sup_{g \in H \setminus \{0\}} \frac{|(g, u - u_h)_H|}{\|g\|_H}.$$

Insgesamt gilt somit

$$\|u - u_h\|_H = \sup_{g \in H \setminus \{0\}} \frac{|(g, u - u_h)_H|}{\|g\|_H} \leq M \|u - u_h\|_V \left(\sup_{g \in H \setminus \{0\}} \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|w(g) - v_h\|_V \right).$$

□

Wir wenden nun das Aubin-Nitsche-Lemma (den Nitsche-Trick) auf (P) und (P_h) an. In diesem Fall setzen wir

$$V = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = H.$$

Es gilt

$$\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = \overline{H_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} = L^2(\Omega) = H \qquad (\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} = L^2(\Omega)).$$

Ferner ist die Bilinearform $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ im Falle (P) gegeben durch

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Also ist a beschränkt, koerzitiv und symmetrisch.

Satz 6.8 (Fehlerabschätzung für (P_h) bzgl. der $L^2(\Omega)$-Norm)**.** *Es sei Ω zusätzlich konvex. Dann existiert eine Konstante $c = c(\Omega, \sigma, n) > 0$, so dass für die Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ von (P) und $u_h \in V_{0h}$ von (P_h) gilt:*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \le ch^2|u|_{H^2(\Omega)} \quad \forall h \in (0,1].$$

Beweis. Das Aubin-Nitsche-Lemma liefert

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\le c(\Omega)\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sup_{g \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \inf_{v_h \in V_{0h}} \|w(g) - v_h\|_{H^1(\Omega)} \right) \\
&\le c(\Omega,\sigma,n)h|u|_{H^2(\Omega)} \left(\sup_{g \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \inf_{v_h \in V_{0h}} \|w(g) - v_h\|_{H^1(\Omega)} \right) \\
&\le c(\Omega,\sigma,n)h|u|_{H^2(\Omega)} \left(\sup_{g \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \|w(g) - \Pi_h w(g)\|_{H^1(\Omega)} \right) \\
&\le c(\Omega,\sigma,n)h|u|_{H^2(\Omega)} \left(\sup_{g \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} c(\sigma,n)h|w(g)|_{H^2(\Omega)} \right) \\
&\le c(\Omega,\sigma,n)h^2|u|_{H^2(\Omega)} \left(\sup_{g \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|w(g)|_{H^2(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \right).
\end{aligned}$$

Laut Grisvard [4] wissen wir auch

$$|w(g)|_{H^2(\Omega)} \le \|w(g)\|_{H^2(\Omega)} \le c(\Omega)\|g\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall g \in H^2(\Omega).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\le c(\Omega,\sigma,n)h^2|u|_{H^2(\Omega)} \left(\sup_{g \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} c(\Omega)\frac{\|g\|_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \right) \\
&= c(\Omega,\sigma,n)h^2|u|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

6.3. Fehlerabschätzung für (P_h) bzgl. der $L^\infty(\Omega)$-Norm

Im Folgenden untersuchen wir den $L^\infty(\Omega)$-Fehler $\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ab jetzt nehmen wir zusätzlich an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes polygonales konvexes Gebiet ist.

6.3.1. Fehleranalyse mit gewichteten Normen

Definition 6.9. Es sei $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ nichtnegativ, das heißt, es gelte $\varepsilon \ge 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Wir definieren die folgende Seminorm auf $H^m(\Omega)$:

$$|v|_{H^m_\varepsilon(\Omega)} := \left(\int_\Omega \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H^m(\Omega), \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Bemerkung 6.10. Ist $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ positiv mit $\varepsilon^{-1} \in L^\infty(\Omega)$, so gilt für alle

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

die folgende Abschätzung:

$$|a(u,v)| \leq |u|_{H^1_{\varepsilon^s}(\Omega)} |v|_{H^1_{\varepsilon^{-s}}(\Omega)} \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

denn

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \varepsilon^{\frac{s}{2}} \nabla u \cdot \varepsilon^{-\frac{s}{2}} \nabla v \,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \left(\int_\Omega \varepsilon^s |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \varepsilon^{-s} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Satz 6.11. *Es existiert eine Konstante $c = c(\Omega) > 0$, so dass für alle Funktionen $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ der Gestalt*

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\|x - \bar{x}\|_2^2 + \theta^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}^+, \quad \bar{x} \in \overline{\Omega}$$

die folgende Abschätzung gilt:

$$\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \quad |v|^2_{H^2_{\varepsilon^{-1}}(\Omega)} \leq c \left(\|\Delta v\|^2_{L^2_{\varepsilon^{-1}}(\Omega)} + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right).$$

Beweis. Es sei $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\|x - \bar{x}\|_2^2 + \theta^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \overline{\Omega}.$$

Für die Funktion

$$w(x) = (x_1 - \bar{x}_1) v(x)$$

gilt $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} (x_1 - \bar{x}_1) D_1^2 v &= D_1^2 w - 2 D_1 v, \\ (x_1 - \bar{x}_1) D_1 D_2 v &= D_1 D_2 w - D_2 v, \\ (x_1 - \bar{x}_1) D_2^2 v &= D_2^2 w, \\ \Delta w &= (x_1 - \bar{x}_1) \Delta v + 2 D_1 v. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_\Omega (x_1 - \bar{x}_1)^2 \sum_{i,j=1}^{2} |D_i D_j v|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega (D_1^2 w - 2D_1 v)^2 + 2(D_1 D_2 w - D_2 v)^2 + (D_2^2 w)^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq 2 |w|^2_{H^2(\Omega)} + 8 |v|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leq 2 c_0(\Omega) \|\Delta w\|^2_{L^2(\Omega)} + 8 |v|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c_1(\Omega) \left(\int_\Omega (x_1 - \bar{x}_1)^2 (\Delta v)^2 \,\mathrm{d}x + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right) \qquad (*) \end{aligned}$$

mit einer nur von Ω abhängigen Konstanten $c_1(\Omega) > 0$. Analog folgt

$$\int_\Omega (x_2 - \bar{x}_2)^2 \sum_{i,j=1}^{2} |D_i D_j v|^2 \,\mathrm{d}x \le c_1(\Omega) \left(\int_\Omega (x_2 - \bar{x}_2)^2 (\Delta v)^2 \,\mathrm{d}x + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right). \qquad (**)$$

Insgesamt gilt

$$\begin{aligned}
|v|^2_{H^2_{\varepsilon^{-1}}(\Omega)} &= \int_\Omega \varepsilon^{-1} \sum_{i,j=1}^{2} |D_i D_j v|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega ((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \theta^2) \sum_{i,j=1}^{2} |D_i D_j v|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)-(**)}{\le} 2c_1(\Omega) \left(\int_\Omega ((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2)(\Delta v)^2 \,\mathrm{d}x + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right) + \theta^2 |v|^2_{H^2(\Omega)} \\
&\le 2c_1(\Omega) \left(\int_\Omega ((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2)(\Delta v)^2 \,\mathrm{d}x + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right) + \theta^2 c_0(\Omega) \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\le \max\{2c_1(\Omega), c_0(\Omega)\} \left(\int_\Omega ((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \theta^2)(\Delta v)^2 \,\mathrm{d}x + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right) \\
&= \max\{2c_1(\Omega), c_0(\Omega)\} \left(\|\Delta v\|_{L^2_{\varepsilon^{-1}}(\Omega)} + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.12. Die Abschätzung von Grisvard

$$|w|_{H^2(\Omega)} \le \|w\|_{H^2(\Omega)} \le c(\Omega) \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$$

muss im Falle der gewichteten $H^2_{\varepsilon^{-1}}(\Omega)$-Seminorm modifiziert werden:

$$|w|^2_{H^2_{\varepsilon^{-1}}(\Omega)} \le c \left(\|\Delta w\|^2_{L^2_{\varepsilon^{-1}}(\Omega)} + |w|^2_{H^1(\Omega)} \right) \quad \forall w \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$$

und ε wie im obigen Satz.

Im Folgenden untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der gewichtete $|\cdot|_{H^m_\varepsilon(\Omega)}$-Seminorm und der klassischen $|\cdot|_{W^{m,\infty}(\Omega)}$-Seminorm.

Satz 6.13. *Es sei $\theta \in \mathbb{R}^+$, $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ sowie*

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\|x - \bar{x}\|_2^2 + \theta^2}.$$

Dann existiert zu jedem $s > 1$ und $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Konstante $c(s,m) > 0$ mit

$$|v|_{H^m_{\varepsilon^s}(\Omega)} \le c(s,m) \frac{1}{\theta^{s-1}} |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{m,\infty}(\Omega).$$

Ferner existiert zu jedem $s \in (0,1)$ und $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Konstante $c(\Omega,s,m) > 0$ mit

$$|v|_{H^m_{\varepsilon^s}(\Omega)} \le c(\Omega,s,m)\, |\ln \theta|^{\frac{1}{2}} |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{m,\infty}(\Omega) \quad \forall \theta \le s.$$

Beweis. Es sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $v \in W^{m,\infty}(\Omega)$. Ferner sei $s > 1$. Laut Definition gilt

$$
\begin{aligned}
|v|_{H^m_{\varepsilon^s}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \varepsilon^s \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_\Omega \varepsilon^s \sum_{|\alpha|=m} |v|^2_{W^{m,\infty}(\Omega)} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c(m) \left(\int_\Omega \varepsilon^s \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)}. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Mit $\delta > 0$ bezeichnen wir den Durchmesser von Ω, das heißt, $\delta = \operatorname{diam}(\Omega)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \varepsilon^s \,\mathrm{d}x \leq \int_{B(\bar{x},\delta)} \varepsilon^s \,\mathrm{d}x = \int_{B(\bar{x},\delta)} \left(\frac{1}{\|x-\bar{x}\|_2^2 + \theta^2} \right)^s \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^\delta \frac{\tau}{(\tau^2+\theta^2)^s} \,\mathrm{d}\tau \\
&\leq 2\pi \int_0^\infty \frac{\tau}{(\tau^2+\theta^2)^s} \,\mathrm{d}\tau \\
&= 2\pi \frac{1}{2(s-1)\theta^{2(s-1)}}.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich die gewünschte Abschätzung

$$
|v|_{H^m_{\varepsilon^s}(\Omega)} \leq c(s,m) \frac{1}{\theta^{s-1}} |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{m,\infty}(\Omega).
$$

Für die zweite Abschätzung zeigt man

$$
\int_\Omega \varepsilon^s \,\mathrm{d}x \leq c(\Omega, s)\, |\ln \theta|.
$$

□

Im nächsten Satz beweisen wir die umgekehrte Abschätzung für stückweise lineare und stetige Funktionen $v_h \in V_h$. Dazu benötigen wir die folgende inverse Abschätzung.

Lemma 6.14. *Die Triangulierung $\mathcal{T}_h$ erfülle zusätzlich die folgende Annahme:*

$$
\exists\, \nu > 0 \quad \forall K \in T_h \;:\; \frac{h}{h_K} \leq \nu.
$$

Dann existiert eine Konstante $c = c(\sigma, \nu) > 0$ mit

$$
|v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq \frac{c}{h} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h.
$$

Beweis. Es sei $v_h \in V_h$. Nach Korollar 5.62 und Satz 5.64 gilt

$$
\|\hat{v}_h\|_{L^\infty(\hat{K})} \leq c_1 \|v_h\|_{L^\infty(K)} \quad \forall K \in T_h \qquad (*)
$$

sowie

$$|v_h|_{W^{1,\infty}(K)} \leq c_2 \|B_K^{-1}\|_2 |\hat{v}_h|_{W^{1,\infty}(\hat{K})} \leq c_2 \frac{\hat{h}}{\rho_K} |\hat{v}_h|_{W^{1,\infty}(\hat{K})} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \tag{$**$}$$

mit von v_h, K und h unabhängigen Konstanten $c_1, c_2 > 0$. Beachte, dass $v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K)$ für alle $K \in \mathcal{T}_h$ gilt und dass $\hat{h} = \operatorname{diam}(\hat{K})$ bezeichnet. Ferner ist $\hat{v}_h = v_h \circ F_K$ mit der invertierbaren affinen Abbildung $F_K : \hat{K} \to K$ aus der Definition der affinen Äquivalenz. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{W^{1,\infty}(K)} = |v_h|_{W^{1,\infty}(K^*)} &\overset{(**)}{\leq} c_2 \frac{\hat{h}}{\rho_{K^*}} |\hat{v}_h|_{W^{1,\infty}(\hat{K})} \\ &\leq c_2 \hat{h} \frac{h}{h_{K^*}} \frac{h_{K^*}}{\rho_{K^*}} \frac{1}{h} |\hat{v}_h|_{W^{1,\infty}(\hat{K})} \\ &= c(\sigma, \nu) \frac{1}{h} |\hat{v}_h|_{W^{1,\infty}(\hat{K})} \\ &\leq c(\sigma, \nu) \frac{1}{h} \hat{c} \|\hat{v}_h\|_{L^\infty(\hat{K})}, \end{aligned} \tag{$***$}$$

denn es ist $\hat{v}_h \in \mathbb{P}_1(\hat{K})$. Nun wählen wir $\tilde{K} \in \mathcal{T}_h$ mit $\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} = \|v_h\|_{L^\infty(\tilde{K})}$. Dann liefern ($***$) und ($*$) die gewünschte Abschätzung:

$$|v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq c(\sigma, \nu) \frac{1}{h} \|v_h\|_{L^\infty(\tilde{K})} = c(\sigma, \nu) \frac{1}{h} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

□

Bemerkung 6.15. Ist $\mathcal{T}_h$ uniform, so ist die inverse Annahme aus Lemma 6.14 erfüllt, denn

$$\frac{h}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

liefert

$$h \leq \sigma \rho_K \leq \sigma h_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Satz 6.16. *Die Triangulierung $\mathcal{T}_h$ sei zusätzlich uniform. Ferner sei $\gamma > 0$ und*

$$\varepsilon_h(x) = \frac{1}{\|x - x_h\|_2^2 + \theta_h^2}$$

mit $x_h \in \overline{\Omega}$ und $\theta_h \geq \gamma h$ für alle $h \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert eine Konstante $c = c(\Omega, \gamma, \sigma, \nu) > 0$, so dass gilt

(i) $\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \frac{\theta_h^2}{h} \|v_h\|_{L^2_{\varepsilon_h^2}(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h : \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} = |v_h(x_h)|,$

(ii) $|v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq c \frac{\theta_h}{h} |v_h|_{H^1_{\varepsilon_h}(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h : |v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max\{|D_1 v_h(x_h)|, |D_2 v_h(x_h)|\}.$

Beweis. Zu (i): Es sei $v_h \in V_h$ mit $\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} = |v_h(x_h)|$. Dann gilt für alle $x \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned}
\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} - |v_h(x)| = |v_h(x_h)| - |v_h(x)| &\leq |v_h(x_h) - v_h(x)| \\
&\leq \sqrt{2}|v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\|x_h - x\|_2 \\
&\overset{\text{Lemma 6.14}}{\leq} \frac{c(\sigma,\nu)}{h}\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}\|x_h - x\|_2 \\
&=: \frac{c_1}{h}\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}\|x_h - x\|_2.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt

$$|v_h(x)| \geq \left(1 - \frac{c_1}{h}\|x_h - x\|_2\right)\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\|v_h\|^2_{L^2_{\varepsilon_h^2}(\Omega)} &= \int_\Omega \varepsilon_h^2 |v_h|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_\Omega \varepsilon_h^2 \left(1 - \frac{c_1}{h}\|x_h - x\|_2\right)^2 \|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega)} \,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\overline{\Omega}\cap B(x_h, \frac{h}{2c_1})} \left(\frac{1 - \frac{c_1}{h}\|x_h - x\|_2}{\|x - x_h\|_2^2 + \theta_h^2}\right)^2 \mathrm{d}x \|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\geq \int_{\overline{\Omega}\cap B(x_h, \frac{h}{2c_1})} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{h^2}{4c_1^2} + \theta_h^2}\right)^2 \mathrm{d}x \|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\geq \int_{\overline{\Omega}\cap B(x_h, \frac{h}{2c_1})} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\theta_h^2\left(1 + \frac{1}{4c_1^2\gamma^2}\right)}\right)^2 \mathrm{d}x \|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&= \frac{1}{4}\theta_h^{-4}\|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4c_1^2\gamma^2}}\right)^2 \left|\overline{\Omega} \cap B\left(x_h, \frac{h}{2c_1}\right)\right| \\
&\geq \theta_h^{-4}\|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4c_1^2\gamma^2}}\right)^2 c_2(\Omega)\left(\frac{h}{2c_1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt Aussage (i). Aussage (ii) beweist man analog zu (i). □

Wir wollen nun eine Fehlerabschätzung für den V_h-Interpolationsoperator

$$\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to V_h$$

bzgl. der gewichteten $|\cdot|_{H^m_{\varepsilon_h^s}(\Omega)}$-Seminorm herleiten.

Satz 6.17. *Es sei $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und*

$$\varepsilon_h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad \varepsilon_h(x) = \frac{1}{\|x - x_h\|_2^2 + \theta_h^2}$$

mit $x_h \in \overline{\Omega}$ und $\theta_h \geq 2|s|h$ für alle $h \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für $m \in \{0,1\}$ und für alle $h \in \mathbb{R}^+$:

$$|v - \Pi_h v|_{H^m_{\varepsilon_h^s}(\Omega)} \leq c(m,\sigma) h^{2-m} |v|_{H^2_{\varepsilon_h^s}(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

mit $c(m,\sigma) > 0$.

Beweis. Im Abschnitt 5.5.4 haben wir die folgende Abschätzung gezeigt:

$$|v - \Pi_h v|_{H^m(K)} \leq c(m,\sigma) h^{2-m} |v|_{H^2(K)} \quad \forall v \in H^2(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{$*$}$$

Für jedes $K \in \mathcal{T}_h$ wählen wir $x_K \in K$ und $\bar{x}_K \in K$ mit

$$\begin{aligned} \min_{x \in K} \varepsilon_h^s(x) &= \varepsilon_h^s(x_K) > 0, \\ \max_{x \in K} \varepsilon_h^s(x) &= \varepsilon_h^s(\bar{x}_K) > 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes $K \in \mathcal{T}_h$ und $v \in H^2(K)$

$$\begin{aligned} |v - \Pi_h v|_{H^m_{\varepsilon_h^s}(K)} &= \left(\int_K \varepsilon_h^s \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha (v - \Pi_h v)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\varepsilon_h^s(\bar{x}_K)\right)^{\frac{1}{2}} |v - \Pi_h v|_{H^m(K)} \end{aligned} \tag{$**$}$$

sowie

$$|v|_{H^2(K)} \leq \left(\varepsilon_h^s(x_K)\right)^{-\frac{1}{2}} |v|_{H^2_{\varepsilon_h^s}(K)}. \tag{$***$}$$

Die Abschätzungen $(*)$ - $(***)$ liefern

$$|v - \Pi_h v|_{H^m_{\varepsilon_h^s}(K)} \leq c(m,\sigma) h^{2-m} \left(\frac{\varepsilon_h^s(\bar{x}_K)}{\varepsilon_h^s(x_K)} \right)^{\frac{1}{2}} |v|_{H^2_{\varepsilon_h^s}(K)} \quad \forall v \in H^2(K)\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad m \in \{0,1\}.$$

Wir müssen nun noch die Beschränktheit von $\left(\frac{\varepsilon_h^s(\bar{x}_K)}{\varepsilon_h^s(x_K)} \right)^{\frac{1}{2}}$ nachweisen. Zuerst gilt

$$\frac{\mathrm{D}_j \varepsilon_h^s(x)}{\varepsilon_h^s(x)} = -2s \frac{x_j - x_{hj}}{\|x - x_h\|_2^2 + \theta_h^2}, \quad j \in \{1,2\}.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\|(\varepsilon_h^s)'(x)\|_2}{\varepsilon_h^s(x)} \leq 2|s| \sup_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\|x - x_h\|_2}{\|x - x_h\|_2^2 + \theta_h^2} \leq \frac{|s|}{\theta_h}.$$

Somit gilt für alle $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned}\varepsilon_h^s(\bar{x}_K) = \varepsilon_h^s(x_K) + (\varepsilon_h^s)'(\xi)(\bar{x}_K - x_K) &= \varepsilon_h^s(x_K) + \frac{(\varepsilon_h^s)'(\xi)}{\varepsilon_h^s(\xi)}(\bar{x}_K - x_K)\varepsilon_h^s(\xi) \\ &\leq \varepsilon_h^s(x_K) + \frac{|s|}{\theta_h}\|\bar{x}_K - x_K\|_2 \varepsilon_h^s(\bar{x}_K) \\ &\leq \varepsilon_h^s(x_K) + \frac{1}{2}\varepsilon_h^s(\bar{x}_K).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{\varepsilon_h^s(\bar{x}_K)}{\varepsilon_h^s(x_K)} \leq 2.$$

Insgesamt gilt

$$|v - \Pi_h v|_{H^m_{\varepsilon_h^s}(K)} \leq c(m,\sigma)\sqrt{2}h^{2-m}|v|_{H^2_{\varepsilon_h^s}(K)} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad m \in \{0,1\}.$$

□

6.3.2. Fehlerabschätzung für (P_h) bzgl. der $L^\infty(\Omega)$-Norm

Für $y \in H_0^1(\Omega)$ besitzt die Variationsgleichung

$$a(y_h, v_h) = a(y, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}$$

genau eine Lösung $y_h \in V_{0h}$ (Lemma von Lax-Milgram mit einer koerzitiven und beschränkten Bilinearform $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$). Wir bezeichnen die resultierende Projektion

$$y \mapsto y_h$$

mit $\Phi_h : H_0^1(\Omega) \to V_{0h}$. Setzen wir $v_h = y_h$ in die obige Variationsgleichung ein, so erhalten wir

$$\|\Phi_h y\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega)\|y\|_{H^1(\Omega)}.$$

Satz 6.18. *Die Triangulierung $\mathcal{T}_h$ sei zusätzlich uniform. Dann existieren eine von h unabhängige Konstante $c > 0$ sowie $h_0 \in (0,1)$, so dass für alle $h \in (0, h_0]$ und $v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ gilt*

$$|\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|\Phi_h v\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\Phi_h v|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq c\left(\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\ln h||v|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right).$$

Beweis. Man verwende die Abschätzungen, die wir im vorherigen Kapitel bewiesen haben ([2, S. 156-165]). □

Bemerkung 6.19. Für jedes $h \in \mathbb{R}^+$ definiert

$$v \mapsto \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\ln h||v|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \quad H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad (*)$$

eine (vollständige) Norm auf $H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Ebenso definiert für jedes $h \in (0,1)$ die Abbildung

$$v_h \mapsto |\ln h|^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \quad V_{0h} \to \mathbb{R} \tag{$**$}$$

eine (vollständige) Norm auf V_{0h}. Falls wir nun $H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ bzw. V_{0h} mit ($*$) bzw. mit ($**$) ausstatten, so ist

$$\Phi_h : H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \to V_{0h}$$

linear und beschränkt:

$$\|\Phi_h v\|_{V_{0h}} \leq c\|v\|_{H_0^1(\Omega)\cap W^{1,\infty}(\Omega)}$$

mit einer von h unabhängigen Konstante $c > 0$.

Satz 6.20 (Fehlerabschätzung für (P_h) bzgl. der $L^\infty(\Omega)$-Norm)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes und polygonales Gebiet. Ferner sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige und uniforme Triangulierung von Ω. Die Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ von* (P) *erfülle die höhere Regularität*

$$u \in W^{2,\infty}(\Omega).$$

Dann existieren eine von h unabhängige Konstanten $c > 0$ sowie $\bar{h} \in (0, \frac{1}{e}]$, so dass für alle $h \in (0, \bar{h}]$ gilt:

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^2|\ln h|^{\frac{3}{2}}|u|_{W^{2,\infty}(\Omega)},$$
$$|u - u_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq ch|\ln h||u|_{W^{2,\infty}(\Omega)}.$$

Beweis. Zur Erinnerung: $u_h \in V_{0h}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} & a(u_h, v_h) = \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx = a(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h} \\ \Leftrightarrow \quad & a(u_h, v_h) = a(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h} \\ \Leftrightarrow \quad & u_h = \Phi_h u. \end{aligned}$$

Somit gilt

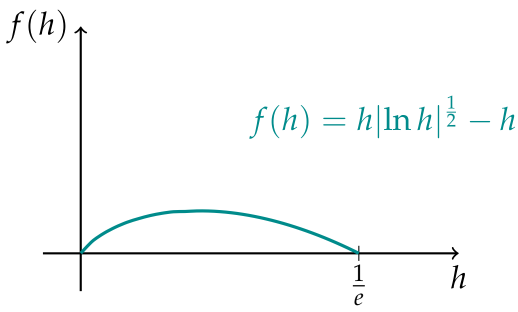
$$u - u_h = u - \Phi_h u - v_h + \Phi_h v_h = (\mathrm{Id} - \Phi_h)(u - v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h}.$$

Aus diesem Grund liefert der vorherige Satz

$$\begin{aligned} & |\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|u - u_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ = & |\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|(\mathrm{Id} - \Phi_h)(u - v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} + h|(\mathrm{Id} - \Phi_h)(u - v_h)|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ \leq & |\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|u - v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + |\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|\Phi_h(u - v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\Phi_h(u - v_h)|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ \leq & |\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|u - v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + c\left(\|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\ln h||u - v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \end{aligned} \tag{$*$}$$

für alle $v_h \in V_{0h}$ mit einer von h unabhängigen Konstante $c > 0$. Beachte, dass $V_{0h} \subset C^{0,1}(\overline{\Omega}) = W^{1,\infty}(\Omega)$ gilt. Weiter gilt für alle $h \in (0, \bar{h}]$ mit $\bar{h} = \min\{h_0, \frac{1}{e}\}$:

$$h|\ln h_0|^{-\frac{1}{2}}|\ln h| \geq h|\ln h|^{-\frac{1}{2}}|\ln h| = h|\ln h|^{\frac{1}{2}} \geq h.$$



Daraus folgt

$$\begin{aligned} &|\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|u - v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ \leq\ &|\ln h_0|^{-\frac{1}{2}}\left(\|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\ln h||u - v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \quad \forall v_h \in V_{0h} \quad \forall h \in (0, \bar{h}]. \quad (**) \end{aligned}$$

Setzen wir ($**$) in ($*$), so folgt

$$\begin{aligned} &|\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|u - u_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ \leq\ &\underbrace{\left(|\ln h_0|^{-\frac{1}{2}} + c\right)}_{=:c_1}\left(\|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\ln h||u - v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \quad \forall v_h \in V_{0h} \quad \forall h \in (0, \bar{h}]. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &|\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|u - u_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ \leq\ &c_1 \inf_{v_h \in V_{0h}} \left(\|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|\ln h||u - v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \quad \forall h \in (0, \bar{h}]. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für den Interpolationsoperator

$$|u - \Pi_h u|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \leq c(\sigma, m) h^{2-m} |u|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$$

für $m \in \{0, 1\}$ (siehe Abschnitt 5.5.2), denn laut Annahme ist $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Hieraus ergibt sich

$$|\ln h|^{-\frac{1}{2}}\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} + h|u - u_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq ch^2|\ln h||u|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \quad \forall h \in (0, \bar{h}]$$

mit $\bar{h} = \min\{h_0, \frac{1}{e}\}$. Insgesamt folgt daraus die Behauptung. $\square$

A Anhang

A.1. Der Transformationssatz

Definition A.1 (σ-Algebra)**.** Sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge $\mathscr{A}$ von $\mathscr{P}(\Omega)$ heißt eine σ-Algebra (in Ω), wenn gelten:

(i) $\Omega \subset \mathscr{A}$;

(ii) mit $A \in \mathscr{A}$ ist auch $\Omega \setminus A \in \mathscr{A}$;

(iii) für jede Folge $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ in $\mathscr{A}$ ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Definition A.2 (Borel-Mengen)**.** Die von der Familie $\mathscr{Q}^d$ der halboffenen Quader in $\mathbb{R}^d$ erzeugte σ-Algebra wird mit $\mathscr{B}^d$ bezeichnet; ihre Elemente heißen die *Borel-Mengen* in $\mathbb{R}^n$.

Satz A.3 (Transformationsformel)**.** *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

(i) Ist $A \subset U$ eine Borel-Menge, dann ist auch $\varphi(A) \subset V$ eine Borel-Menge, und es gilt

$$\lambda^n(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi)| \, \mathrm{d}\lambda^n.$$

(ii) Genau dann ist $g : \varphi(A) \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-integrierbar, wenn

$$(g \circ \varphi)|\det(D\varphi(x))| : A \to [-\infty, \infty]$$

Lebesgue-integriebar ist, und dann gilt

$$\int_{\varphi(A)} g(y) \, \mathrm{d}\lambda^n y = \int_A g(\varphi(x))|\det(D\varphi(x))| \, \mathrm{d}\lambda^n x.$$

A.2. Ergänzungen zu Kapitel 6

A.2.1. Satz 6.11

In Satz 6.11 haben wir die Abschätzung

$$\int_\Omega (D_1^2 w - 2D_1 v)^2 + 2(D_1 D_2 w - D_2 v)^2 + (D_2^2 w)^2 \,\mathrm{d}x \leq 2|w|_{H^2(\Omega)}^2 + 8|v|_{H^1(\Omega)}^2$$

verwendet. Diese möchten wir nun kurz verifizieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
&(D_1^2 w - 2D_1 v)^2 + 2(D_1 D_2 w - D_2 v)^2 + (D_2^2 w)^2 \\
&= (D_1^2 w)^2 - 4D_1^2 w D_1 v + (2D_1 v)^2 + 2\left((D_1 D_2 w)^2 - 2D_1 D_2 w D_2 v + (D_2 v)^2\right) + (D_2^2 w)^2 \\
&\leq (D_1^2 w)^2 + (D_2^2 w)^2 + 2(D_1 D_2 w)^2 + (2D_1 v)^2 + 2(D_2 v)^2 + |4D_1^2 w D_1 v| + |4D_1 D_2 w D_2 v|.
\end{aligned}$$

Die Youngsche Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}$$

liefert mit $\varepsilon = 2$

$$|4D_1^2 w D_1 v| \leq |D_1 w|^2 + 4|D_1 v|^2.$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned}
&(D_1^2 w - 2D_1 v)^2 + 2(D_1 D_2 w - D_2 v)^2 + (D_2^2 w)^2 \\
&\leq 2(D_1^2 w)^2 + (D_2^2 w)^2 + 4(D_1 D_2 w)^2 + 8(D_1 v)^2 + 4(D_2 v)^2 \\
&\leq 2(D_1^2 w)^2 + 2(D_2^2 w)^2 + 4(D_1 D_2 w)^2 + 8(D_1 v)^2 + 8(D_2 v)^2.
\end{aligned}$$

A.2.2. Satz 6.16

In Satz 6.16 haben wir die Abschätzung

$$|v_h(x_h) - v_h(x)| \leq \sqrt{2}|v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\|x_h - x\|_2$$

verwendet. Da v_h Lipschitz-stetig und Ω konvex ist, ist die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(t) = v_h(x + t(x_h - x))$$

Lipschitz-stetig. Dann folgt aus dem Satz von Rademacher (vgl. [3, S. 281]), dass g fast überall auf $(0,1)$ differenzierbar ist mit

$$g'(t) = \nabla v_h(x + t(x_h - x)) \cdot (x_h - x) \quad \text{für fast alle } t \in (0,1).$$

Das Fundamentaltheorem für das Lebesgue-Integral liefert dann

$$
\begin{aligned}
|v_h(x_h) - v_h(x)| &= |g(1) - g(0)| \\
&= \left| \int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \nabla v_h(x + t(x_h - x)) \cdot (x_h - x)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 |\nabla v_h(x + t(x_h - x)) \cdot (x_h - x)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \|\nabla v_h(x + t(x_h - x))\|_2 \|x_h - x\|_2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{D_1 v_h(x + t(x_h - x))^2 + D_2 v_h(x + t(x_h - x))^2}\,\|x_h - x\|_2\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \sqrt{2|v_h|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)}}\,\|x_h - x\|_2\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}|v_h|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|x_h - x\|_2.
\end{aligned}
$$

Symbolverzeichnis

Finite-Elemente-Methode

V_h	Finite-Elemente-Raum (Definition 5.20)
(K, P_K, Σ_K)	Finites Element (Definition 5.5)
h_K	Diameter des Gebiets K
$\mathcal{N}_h$	Menge aller paarweise verschiedenen Knotenpunkte (Nodalpunkte) eines Finite-Elemente-Raums V_h
P_K	Reeller Funktionenraum auf K
$\Pi_h v$	Globaler V_h-Interpolationsoperator einer Funktion $v \in C(\overline{\Omega})$
$\Pi_K v$	P_K-Interpolierende einer Funktion $v \in \mathrm{dom}(\Sigma_K)$ (Definition 5.33)
ρ_K	Diameter des größten im Gebiet K enthaltenden Kreises
Σ_h	Menge aller globalen Freiheitsgrade (Knotenfunktionale) eines Finite-Elemente-Raums V_h
Σ_K	Menge aller Freiheitsgrade (Knotenfunktionale) des Gebiets K
$\mathcal{T}_h$	Zulässige Triangulierung von Ω in endlich viele n-Simplexe (Definition 5.18)

L^p-Räume

$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	Raum aller lokal integrierbaren Funktionen (Definition 2.18)
$L^p(\Omega)$	Raum der p-fach Lebesgue integrierbaren Funktionen (Definition 2.1)
$L^\infty(\Omega)$	Raum aller fast überall gleichmäßig beschränkten und messbaren Funktionen (Definition 2.2)

Sobolev-Räume

$H^k(\Omega)$	Abkürzung für den Hilbertraum $W^{k,2}(\Omega)$ (Definition 2.50)
$H^k_0(\Omega)$	Abkürzung für den Hilbertraum $W^{k,2}_0(\Omega)$ (Definition 2.53)

$W^{k,p}(\Omega)$	Vektorraum aller Funktionen $f \in L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, für die alle schwachen Ableitungen $D^\alpha f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\lvert\alpha\rvert \leq k$ existieren und zu $L^p(\Omega)$ gehören (Definition 2.50)
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $W^{k,p}(\Omega)$-Norm (Definition 2.53)

Stetige Funktionen

$C_0^k(\Omega)$	Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, deren Träger kompakt in Ω enthalten ist (Definition 2.23)
$C_0^\infty(\Omega)$	Menge der Testfunktionen; die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, deren Träger kompakt in Ω enthalten ist (Definition 2.28)
$C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$	Raum aller Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten $\beta \in (0,1]$ (Definition 5.44)
$C^k(\Omega)$	Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ im klassischen Sinne (Definition 2.23)
$\operatorname{supp} f$	Träger einer Funktion (Definition 2.21)

Stichwortverzeichnis