1 Gruppenübung

A. 1: (a) 1. Sei $x < -1$.

Dann ist $x - 1 < -2 < 0$ und $x + 1 < 0$

Lösen müssen wir demnach folgende Gleichung:

$$-x + 1 + (-x - 1) = 7$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2}.$$

Da $x = -\frac{7}{2} < -1$, ist $-\frac{7}{2}$ eine Lösung.

2. Sei $-1 \leq x \leq 1$.

Dann ist $x + 1 \geq 0, x - 1 \leq 0$ und

$$x - 1 - x - 1 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 7. \quad \lightning$$

3. Sei $x > 1$.

Dann ist $x - 1 > 0$ und , $x + 1 > 2 > 0$

$$x - 1 + x + 1 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{2}.$$

Da $x = \dfrac{7}{2} > 1$, ist $\dfrac{7}{2}$eine Lösung.

Antwort: $x = \frac{7}{2}$ oder $x = -\frac{7}{2}$.

(b) Für jedes y ist $|y|+1 > 0$. Daher erhalten wir : $\Big|\big||x+1|+1\big|+1\Big| = |x+1|+2$.
Soll der gegebene Ausdruck nun = 5 sein, so reicht es die Gleichung
$|x + 1| + 2 = 5$ zu lösen.
Also ist $x + 1 = 3$ oder $x + 1 = -3$,
d.h. $x = 2$ oder $x = -4$.

A. 2: (a) O.B.d.A. können wir annehmen $y \le x$ (sonst tauschen wir x mit y)
Dann unterscheiden wir folgende Fälle :

i. $0 \le y \le x$

ii. $y \le 0 \le x$

iii. $y \le x \le 0$

i. $|x+y| \le |x| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad x+y \le x+y$ ✓

ii. $|x+y| \le x - y.$

Wenn $0 \le x+y$, dann ist $x+y \le x-y$,
d.h. $y \le 0$. Wenn $x+y \le 0$, dann $x-y \le -x-y$,
d.h. $0 \le x$. ✓

iii. $-x-y \le -x-y$ ✓

<u>Alternative Lösung:</u>
Da beide Seiten der Ungleichung $|x+y| \le |x| + |y|$ positiv sind, können wir sie quadrieren:

$$|x+y| \le |x| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \le x^2 + 2|x||y| + y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \le x^2 + 2|xy| + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad xy \le |xy|$$

Letzteres stimmt für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) O.B.d.A sei $|y| \le |x|$.
Dann ist nur noch $|x| - |y| \le |x-y|$ zu beweisen.
DAS folgt aber aus (a) :
$|x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad |x| - |y| = \le |x-y|$

A. 3: (a) $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} \ge ab \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab$
$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2 \ge 0$ ✓
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$.

(b) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2 \geq 0$ ✓

Die Gleichheit gilt für $a = b$.

A. 4: Da $\sqrt{t} \geq 0$ und $t^2 \geq 0$, ist $\sqrt{x^3+1} + (x^4-1)^2 = 0$ genau dann, wenn $x^3 + 1 = 0$ UND $x^4 - 1 = 0$.

Die erste Gleichung liefert $x = -1$ und die zweite liefert $x = \pm 1$. Also ist $\underline{x = -1}$ die einzige Lösung.

A. 5: a) Ist folgende Aussage wahr? „In unserem Seminarraum haben höchstens 100000 Menschen Platz."

Ja, die Anzahl der Plätze im Seminarraum ist sicher kleiner oder gleich 100000. Im Sprachgebrauch verwendet man „höchstens" oft im Sinne einer „kleinsten oberen Schranke" . Der Satz würde also so verstanden werden, dass zwar 100000 Menschen gerade noch Platz hätten, mehr aber nicht. Im Alltag kommt das oft bei Preisen in der Werbung vor: „Flüge ab 19 Euro!", damit sind natürlich auch solche um 1000 Euro inkludiert.

b) Eine Frau ist sehr tierlieb und setzt sich stark für die Umwelt ein. Was ist wahrscheinlicher?
1. Sie hat einen Hund, arbeitet in einem Umweltbüro und liest Bücher von modernen Schriftstellern.
2. Sie arbeitet in einem Büro.

Die erste Aussage ist viel spezieller und auch wirklich ein Spezialfall der zweiten. Trifft also die erste Aussage zu, dann erst recht die zweite ($1 \Rightarrow 2$). Die Umkehrung gilt aber nicht. Im Alltag würde man vielleicht eher zu Aussage 1 tendieren, weil es inhaltlich eine Verbindung zwischen der „Vorgeschichte" und Aussage 1 gibt (Aufgabe stammt aus „Mathemagische Momente", Beitrag von Frau Lengnink).

c) Eine Mutter sagt zu ihrem Kind: „Wenn du nicht brav bist, wirst du bestraft!" . Zehn Minuten später wurde das Kind bestraft. Was war passiert?

Das kann man nicht sagen. Der Schluss „Nicht brav sein ⇒ Bestrafung" lässt keine Aussage über die Umkehrung zu. Im Alltag wird man wohl davon ausgehen, dass das Kind nicht brav war und ev. ignorieren, dass die Bestrafung auch andere oder gar keine Ursachen gehabt haben könnte. „Nicht brav zu sein" ist also hinreichend für Bestrafung, über die Notwendigkeit wurde aber nichts ausgesagt.

d) Ist folgende Aussage wahr?
„Jedes Quadrat ist ein Rechteck oder ein Drachen."

Ja. „Oder" meint in der Mathematik ja nicht das „ausschließende Oder". Im alltäglichen Sprachgebrauch würde man wohl eher sagen „Jedes Quadrat ist sowohl ein Rechteck als auch ein Drachenviereck" und obige Aussage als falsch auffassen.

e) Ist folgende Schlussfolgerung wahr?
„Sie sind ein Mensch, der fliegen kann. Daraus folgt, dass Sie heute noch zum Mond fliegen werden.“

Ja. Aus falschen Aussagen kann man alles folgern! Im Alltag würde man sich wohl kaum darauf einlassen, tatsächlich den Wahrheitswert der *Schlussfolgerung* zu bestimmen. Zu groß ist die Versuchung, die beiden *Aussagen* als falsch zu identifizieren (was ja korrekt ist) und damit diese Frage mit „Nein“ zu beantworten.

f) Ist folgende Aussage wahr?
„Es gibt einen Friseursalon in Essen.“

Ja. „Einen“ ist in der Mathematik im Sinne von „mindestens einen“ zu verstehen. Im Alltag würde man wohl entgegnen, dass es nicht nur einen, sondern sehr viele Friseursalons in Essen gibt. Das erklärt mögliche Verständnisprobleme bei Formulierungen wie „Zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere“.

g) Was sagen Sie zu folgender Argumentation?
„Es gibt in Wirklichkeit keine violetten Kühe, denn ich habe noch nie eine auf einer Wiese gesehen.“

Die Argumentation ist natürlich nicht zulässig. Endlich viele Beispiele (von nicht violetten Kühen) berechtigen noch zu keiner Generalisierung! Im Alltag vertrauen wir fast immer auf endlich viele empirische Befunde, um Sachverhalte für wahr oder falsch zu halten. Paradigmatisch ist die unvollständige Induktion zur „falschen Primzahlformel“ $n^2 + n + 17$.

h) In der Mathematik ist niemals eine Aussage und ihre Negation gleichzeitig falsch. Welche der beiden folgenden Aussage ist dann aber wahr?
1. Alle Bäume sind Laubbäume.
2. Kein Baum ist ein Laubbaum.

Keine der beiden. Die Negation der Aussage 1 ist nämlich: „Es gibt (mindestens) einen Baum, der kein Laubbaum ist“.