10 Gruppenübungen

A. 1: Wir beweisen, dass f im Punkt 0 stetig ist:

Sei $x_n \to 0$. Dann ist

$$\left|f(x_n)\right| = \left|\sqrt{|x_n|}(-1)^{[1/|x_n|]}\right| = \sqrt{|x_n|} \to 0.$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$.

A. 2: Nein. Wir nehmen an, dass eine stetige Fortsetzung möglich ist. Dann ist :

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}} = 1,$$

und auch :

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}+1}{2^{-n}-1} = -1.$$

Widerspruch. ↯

A. 3: Sei $f(x) = x^5 + \dfrac{4}{1+|x|+x^2}$. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ stetig. Außerdem ist $f(0) = 4 > 0$ und $f(-2) = (-2)^5 + \frac{4}{7} < 0$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt also:

$\exists\, x_0 \in (-2, 0)$ mit $f(x_0) = 0$, d.h. $x_0^5 + \dfrac{4}{1+|x_0|+x_0^2} = 0$.

A. 4: (c) Mit dem Zwischenwertsatz. Das sieht man folgendermaßen:

(a) In Aufgabe a) haben wir es mit einer stetigen Funktion zu tun. Die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit kann man ja als eine **stetige Funktion** im Zeitintervall von 6 bis 12 Uhr auffassen („kleine Zeitänderungen bewirken auch nur kleine Änderungen in der Temperatur“, es gibt keine „Temperatursprünge“): $T : [6, 12] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto T(t)$. Es gilt außerdem: $T(6) = -5$ und $T(12) = 4$.

Aus dem **Zwischenwertsatz** können wir folgern, dass es dann zu jeder Zahl (Temperatur) y zwischen $T(6) = -5$ und $T(12) = 4$ eine Zahl (einen Zeitpunkt) z zwischen 6 und 12 gibt, sodass gilt: $T(z) = y$. Insbesondere gibt es also zur Temperatur $y = 3$ einen Zeitpunkt $z \in (6, 12)$ mit $T(z) = 3$.

Was weiß man über den Zeitpunkt? Es muss zumindest *einen* Zeitpunkt im Zeitraum von 6 bis 12 Uhr geben, zu dem die Temperatur gerade 3°C beträgt. Es kann aber durchaus auch mehrere solche Zeitpunkte, auch außerhalb des Intervalls $[6, 12]$, geben. Darüber macht der Zwischenwertsatz keine Aussage.

Es *kann* klarerweise auch einen Zeitpunkt zwischen 6 und 12 Uhr geben, zu dem es 6°C hat. Darüber macht der Zwischenwertsatz hier ebenfalls keine Aussage!

(b) Die Funktion in Aufgabe b), die jedem Zeitpunkt den Guthabenstand auf Niklas Sparbuch angibt, ist **nicht stetig**. Jede Ein- bzw. Auszahlung oder Zinsengutschrift bedeutet ja einen Sprung des Guthabenstandes. Der Zwischenwertsatz kann also hier nicht angewendet werden. Es ist daher auch nicht möglich zu entscheiden, ob der Guthabenstand jemals exakt 60,00 Euro betragen hat.

A. 5: (a) Wir beweisen, dass f auf $(1, 10)$ gleichmäßig stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{20}$. Dann gilt für alle $x, y \in (1, 10)$ mit $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| \leq 20|x - y| < 20\delta = \varepsilon.$$

(b) Wir beweisen, dass f auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist. Wir müssen also zeigen:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists\, x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ und } |f(x) - f(y)| > \varepsilon. \quad (1)$$

Wir wählen $\varepsilon = 1$. Für jedes $\delta > 0$ suchen wir x und y mit $x = x_n = n$ und $y = y_n = n + \frac{\delta}{2}$, wobei n später gewählt wird.
Dann ist $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, und
$|f(x) - f(y)| = |n^2 - (n + \frac{\delta}{2})^2| = n\delta + \frac{\delta^2}{4}$.
Da $n\delta + \frac{\delta^2}{4} \to \infty$ wenn $n \to \infty$, gibt es ein n mit $n\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1$.
Damit haben wir die Eigenschaft (1) bewiesen und gezeigt, dass f auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist.