11 Gruppenübungen

A. 1: Wir untersuchen die Differenzierbarkeit von f mittels Differenzenquotienten:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{1+(a+h)^2} - \frac{1}{1+a^2}}{h} = \frac{1+a^2-(1+(a+h)^2)}{(1+(a+h)^2)(1+a^2)h} =$$
$$= \frac{-2ah-h^2}{(1+(a+h)^2)(1+a^2)h} = \frac{-2a-h}{(1+(a+h)^2)(1+a^2)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{-2a}{(1+a^2)^2}.$$

Also ist f für alle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) = \frac{-2a}{(1+a^2)^2}$.

A. 2: (a) Für alle $x > 0$ und alle $x < 0$ ist f differenzierbar.

Sei also $x = 0$. Wir zeigen, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} 1, & \text{für } h > 0 \\ h, & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

Also ist

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1 \neq 0 = \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

(b) Wenn $x \neq 0$ ist, ist f in x differenzierbar. Sei also $x = 0$.

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

für $h > 0$. Also

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

existiert nicht.

(c) Wenn $x \neq 0$ ist, ist f in x differenzierbar. Sei also $x = 0$.

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D.h.: f ist in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$.

A. 3: Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Da $x_n \to g$, konvergiert $\dfrac{x_n}{n}$ gegen 0. Also ist

$$\frac{\log\left(1+\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}} \to 1. \quad (n\to\infty)$$

Daraus folgt $\log\left(1+\dfrac{x_n}{n}\right)^n = n\log\left(1+\dfrac{x_n}{n}\right) = x_n \cdot \dfrac{\log\left(1+\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}} \to g\cdot 1 = g.$

Da $f(t) = e^t$ in dem Punkt $t = g$ stetig ist, bekommen wir:

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^{\log\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\to} e^g.$$

A. 4: Da $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ ist, erhalten wir

$$n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \to 1. \quad (n\to\infty)$$