# 12 Gruppenübungen

**A. 1:** Wir berechnen die Ableitung:

$$f(x) = x^x = (e^{\log x})^x = e^{x\log x}. \text{ Also ist:}$$
$$f'(x) = e^{x\log x} \cdot (x\log x)' = e^{x\log x} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \log x\right) =$$
$$= x^x(1 + \log x).$$

**A. 2:** (a) Da $e^y = 1+y+\dfrac{y^2}{2!}+\dfrac{y^3}{3!}+\dots$ ist, bekommen wir für $y > 0$: $e^y \geq 1+y+\dfrac{y^2}{2}$.
Damit ist für $y > 0$:

$$0 < \frac{y}{e^y} \leq \frac{y}{1+y+\frac{y^2}{2}} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Sei $y = -\log t$.

Dann ist $t = e^{-y}$. Also ist $t \to 0+$ genau dann, wenn $y \to +\infty$. Damit erhalten wir :

$$\lim_{t\to 0+} t\log t = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(-y) = \lim_{y\to+\infty} -\frac{y}{e^y} = 0, \quad \text{wegen (a).}$$

(c) Sei $t = x\log x$. Dann ist wegen (b): $t \to 0$, wenn $x \to 0+$. Also erhalten wir

$$\frac{x^x - 1}{x\log x} = \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} = \frac{e^t - 1}{t} \to 1 \text{ für } t \to 0.$$

**A. 3:** Wir benutzen den Mittelwertsatz.

Seien $y < x$ und $g(t) = \log(1 + e^t)$. Dann ist $g$ auf $[y, x]$ stetig und auf $(y, x)$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(\xi).$$

D.h. $$\frac{\left|\log\frac{1+e^x}{1+e^y}\right|}{|x-y|} = \frac{\left|\log(1+e^x) - \log(1+e^y)\right|}{|x-y|} = |g'(\xi)| = \frac{e^\xi}{1+e^\xi} \leq 1.$$

**A. 4:** Jede Funktion $f(x) = ce^{2x}$ erfüllt unsere Gleichheit. Um zu beweisen, dass es keine weiteren gibt, definieren wir:

$$g(x) = f(x) \cdot e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Dann ist: $g'(x) = f'(x) \cdot e^{-2x} + f(x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x} \left(f'(x) - 2f(x)\right) = 0$. Daraus folgt, dass $g(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$, d.h. $f(x) = g(x) \cdot e^{2x} = ce^{2x}$.