13 Gruppenübungen

A. 1: (a) $f(x) = x \log x, \quad x \in (0, 1]$. Dann haben wir :

$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \log x$. Dann ist

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log x \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{\mathbf{e}},$$

wobei $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\mathbf{e}}$.

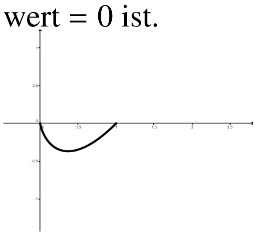
Daraus folgt, dass f auf $\left(0, \frac{1}{\mathbf{e}}\right)$ monoton-fallend - und auf $\left(\frac{1}{\mathbf{e}}, 1\right]$ monoton-wachsend ist.

Außerdem ist $f\left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right) = \frac{1}{\mathbf{e}} \cdot \log \frac{1}{\mathbf{e}} = -\frac{1}{\mathbf{e}}$.

Daraus folgt, dass $-\frac{1}{\mathbf{e}}$ der kleinste Wert von f auf $(0, 1]$ ist.

Weiterhin gilt $f(1) = 0$. Da $f(x) \leq 0$ für $x \in (0, 1]$, ist 0 der größte Wert von f.

Um den Graphen zu skizzieren, sollten wir noch den Grenzwert $\lim_{x \to 0} x \log x$ berechnen. Wir wissen aber schon aus Übung 12, dass dieser Grenzwert = 0 ist.



(b) Wir rechnen analog, wie in (a).

$$f'(x) = 4x^3 - 16x^7 = 4x^3(1 - 4x^4).$$

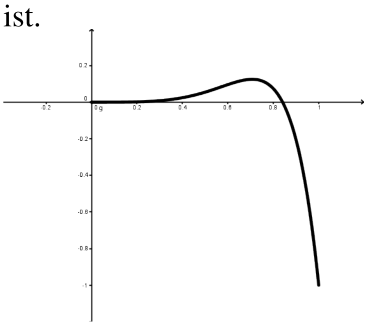
Daraus folgt: $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 4x^4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, und

außerdem: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

($f'(x)$ ist nur in (0,1) berechnet!)

Also ist f auf $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ monoton - wachsend, und auf $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ monoton-fallend. Der größte Wert von f ist $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{8}$.

$f(0) = 0$ und $f(1) = -1$. Daraus folgt, dass der kleinster Wert $= -1$ ist.



A. 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{4}} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} & f'(0) &= \frac{1}{4} \\ f''(x) &= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{7}{4}} & f''(0) &= -\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

$$P_{2,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2.$$

Die Taylorformel lautet: es gibt eine Zahl $0 < \theta < 1$ mit

$$f(x) = P_{2,0}(x) + \frac{f^{(3)}(\theta x)}{3!}x^3.$$

Daraus folgt:

$$\sqrt[4]{1.5} = f\left(\frac{1}{2}\right) = P_{2,0}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f^{(3)}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

$f^{(3)}(x) = -\dfrac{3}{16} \cdot \left(-\dfrac{7}{4}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{11}{4}}, \ \ P_{2,0}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{141}{128}.$ Damit ist:

$$\left|\sqrt[4]{1.5} - \frac{141}{128}\right| \leq \frac{3}{16} \cdot \frac{7}{4} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{11}{4}}}_{<1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \leq \frac{7}{1024}.$$

A. 3:

$$f(x) = \mathbf{e}^x, \quad f^{(n)}(x) = \mathbf{e}^x, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

$$P_{3,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Die Taylorformel: $f(x) = P_{3,0}(x) + \dfrac{\mathbf{e}^{\theta x}}{4!} \cdot x^4$. Daraus folgt:

$$\sqrt[4]{\mathbf{e}} = f\left(\frac{1}{4}\right) = P_{3,0}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\mathbf{e}^{\frac{\theta}{4}}}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4.$$

$P_{3,0}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{493}{384}$. Damit ist:

$$\left|\sqrt[4]{\mathbf{e}} - \frac{493}{384}\right| = \frac{\mathbf{e}^{\frac{\theta}{4}}}{4!} \cdot \frac{1}{4^4} < 3 \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{2048}.$$