14 Gruppenübungen

A. 1: (a) Da $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ gibt es kein lokales Max oder Min. $f''(x) = 6x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{2}{3}$. D.h. f ist auf $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ konkav und auf $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ konvex.

(b)

$$f'(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 16.$$

Weil $4 < 16$, gilt also auch $f''(4) > 0$. D.h. f nimmt an der Stelle $x_0 = 4$ ein lokales Minimum an. Die Funktion f ist auf $(0, 16]$ konvex und auf $[16, +\infty)$ konkav.

A. 2: (a) Man überlegt sich zuerst, dass die Funktion f_n zwischen den Punkten $(0, \frac{1}{n+1})$ und $(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n+1})$ linear verläuft. Das ergibt nach kurzer Rechnung (Einsetzen in $y = kx + d$ und Lösen des Gleichungssystems) den Funktionsterm $\frac{2n-2}{n+1} \cdot x + \frac{1}{n+1}$. Zwischen den Punkten $(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n+1})$ und $(1, \frac{1}{n+1})$ verläuft f_n wieder linear, was diesmal den Term $\frac{2-2n}{n+1} \cdot x + \frac{2n-1}{n+1}$ liefert. Insgesamt erhalten wir also:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{2n-2}{n+1} \cdot x + \frac{1}{n+1} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2-2n}{n+1} \cdot x + \frac{2n-1}{n+1} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

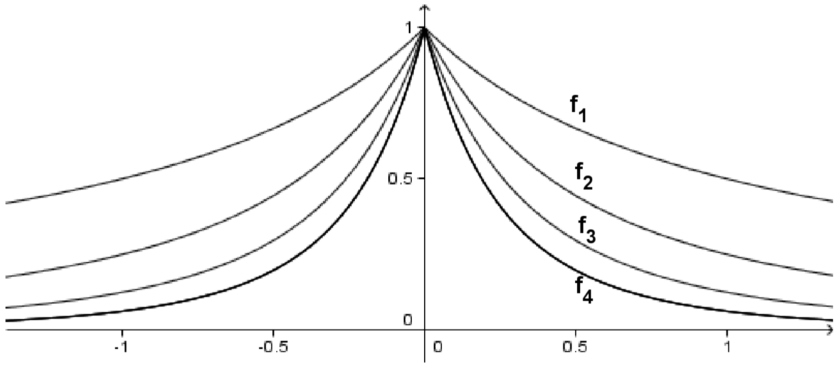
(b) Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen

$$f(x) := \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

(c) Eine Möglichkeit wäre, zuerst wie in Aufgabe (a) passende stückweise lineare Funktionen zu skizzieren und erst dann die entsprechenden Funktionsterme daraus zu gewinnen. Das ist wegen der relativ umständlichen Berechnung des Funktionsterms von f_n aus der Zeichnung (siehe (a)!) aber nicht die eleganteste Möglichkeit. Besser ist es, zuerst den Funktionsterm einer stetigen Funktion f_1 zu finden, die $f_1(1) = 1$ und $0 \leq f_1(x) < 1$ für $x \neq 1$ erfüllt. Das leistet z.B. die Funktion $f_1 = \frac{1}{1+|x|}$. Definieren wir dann nämlich

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{1 + |x|}\right)^n$$

so sind wir klarerweise fertig:



(d) Die Funktionen f_n aus Lösung (c) sind nicht differenzierbar in $x = 0$. Ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion f_1, die $f_1(0) = 1$ und $0 \leq f_1(x) < 1$ für $x \neq 0$ erfüllt, ist z.B. $f_1(x) = e^{-x^2}$. Wir können dann definieren:

$$f_n(x) = (e^{-x^2})^n.$$

A. 3: (a) $f_n(x)$ konvergiert punktweise für alle $x \in [0,1]$ gegen $f(x) = 0$. Für jedes n, suchen wir jetzt $a_n := \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n - x^{n+1}$.

$$g_n(x) := x^n - x^{n+1}, \quad g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n}{n+1}$$

$$g_n(0) = g_n(1) = 0, \quad g_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \cdot \Big(1 - \frac{n}{n+1}\Big) > 0.$$

Also nimmt g_n auf $[0,1]$ das Maximum an der Stelle $x_0 = \dfrac{n}{n+1}$ an. Damit ist

$$0 \leq a_n = g_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \cdot \Big(1 - \frac{n}{n+1}\Big) < 1 \cdot \Big(1 - \frac{n}{n+1}\Big) \to 0.$$

Daraus folgt: f_n konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $f(x) = 0$.

(b)

$$f_n(x) \to 1 \text{ für } x > 0. \;\; a_n := \sup_{x>0} |f_n(x) - 1| = \sup_{x>0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}\right) = ?$$

Dann ist $a_n \underset{x=\frac{1}{\sqrt{n}}}{\geq} 1 - \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Daraus folgt $a_n \nrightarrow 0$, also konvergiert $f_n(x)$ nicht gleichmäßig gegen f auf $(0, \infty)$.