15 Gruppenübungen

A. 1: Bemerkung: Die Regeln von de l'Hospital sind ein recht nützliches Werkzeug zum einfachen Berechnen von Grenzwerten. Der Nachteil gegenüber der herkömmlichen Berechnung von Grenzwerten (siehe z.B. Übungsblatt 12) besteht darin, dass man zwar schnell herausfinden kann, *welche* Zahl Grenzwert ist, aber nicht, *warum* diese Zahl Grenzwert ist.

(a) $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = „\tfrac{+\infty}{+\infty}“ \overset{\text{de l'H.}}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$

(b) $\lim\limits_{t\to 0+} t\log t = „\,0\cdot(-\infty)\,“$. Wir können hier also weder den Grenzwert ausrechnen, noch dürfen wir die Regeln von de l'Hospital anwenden. Wir müssen also zunächst den Ausdruck in die richtige Gestalt bringen!

$\lim\limits_{t\to 0+} t\log t = \lim\limits_{t\to 0+} \frac{\log t}{\frac{1}{t}} = „\frac{-\infty}{+\infty}“ \overset{\text{de l'H.}}{=} \lim\limits_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to 0+}(-t) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x} = „\frac{0}{0}“ = \lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x\log x} - x}{1 - x + \log x} \overset{\text{de l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x\log x}(\log x + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} =$

$„\frac{0}{0}“ \overset{\text{de l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x\log x}(\log x + 1)^2 + e^{x\log x}\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2$

Hier liefert also erst das zweimalige Anwenden einer Regel von de l'Hospital das Ergebnis. Auch das kann vorkommen.

A. 2: (a)

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |x^3 - x|.$$

Die Funktion $g(x) = |x^3 - x|$ ist auf $(-1,0)\cup(0,1)$ differenzierbar und

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{für } x \in (-1,0) \\ 1 - 3x^2 & \text{für } x \in (\,0\,,1) \end{cases}.$$

Damit ist $g'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2 - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Da g auf $[-1,1]$ stetig ist, erhalten wir

$$\|f\|_\infty = \max\left\{g(-1), g(0), g(1), g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} =$$

$$= \max\left\{0, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right\} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt :

$f(n) = \dfrac{n^2}{n^2+1} \to 1$ für $n \to +\infty$. Damit erhalten wir:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

(c) $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[\frac{1}{e},9]} \big||\log x| - 1\big|$. Sei $g(x) = |\log x| - 1$.

Dann ist $g(x) = \begin{cases} -\log x - 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{e}, 1] \\ \log x - 1 & \text{für } x \in [1,9] \end{cases}$.

Also ist g auf $[\frac{1}{e}, 1]$ monoton-fallend und auf $[1,9]$ monoton-steigend. Damit ist:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[\frac{1}{e},1]} \big||\log x| - 1\big| = \max\left\{\left|g\left(\frac{1}{e}\right)\right|, \big|g(1)\big|, \big|g(9)\big|\right\} =$$

$$= \max\{0, 1, \log 9 - 1\} = \log 9 - 1.$$

A. 3: (a) Sei $g_n(x) = \dfrac{\log(1+|nx|)}{(n^3+1)(x^2+1)}$. Da $\log(1+t) \le t \quad \forall t \ge 0$ erhalten wir :

$$|g_n(x)| \le \frac{|nx|}{(n^3+1)(x^2+1)} = \frac{|x|}{x^2+1} \cdot \frac{n}{n^3+1} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n^3+1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Also ist: $\|g_n\|_\infty := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \le \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ (Weierstraß Kriterium).

(b) Sei $g_n(x) = \dfrac{x}{e^{|x|n} \cdot n}$. Wir berechnen $\|g_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)|$

$|g_n(x)| = \dfrac{1}{n}|x| \cdot e^{-|x|\cdot n}$, also müssen wir das Supremum der Funktion $h(t) := t \cdot e^{-t\cdot n}$ auf $[0, +\infty)$ finden.

$$h(0) = 0\ ,\ \lim_{t\to+\infty} h(t) = 0\ ,\ h'(t) = t \cdot e^{-tn} \cdot (-n) + e^{-tn}$$

$$h'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -tn + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{n}.$$ Damit ist

$$\sup_{t\in[0,\infty)} te^{-tn} = \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}\cdot n} = \frac{1}{en}.$$

$$||g_n||_\infty = \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{e^{|x|n}} = \frac{1}{n} \sup_{t\in(0,+\infty)} te^{-tn} = \frac{1}{en^2}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{en^2} < +\infty$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ (Weierstraß Kriterium).

Da $g_n(x)$ jeweils stetig ist und da die Reihen gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergieren, sind die Funktionen f auf $\mathbb{R}$ stetig.