2 Gruppenübungen

A. 1: (a) $x \in A \setminus (B \cup C) \;\Leftrightarrow\; x \in A$ und $x \notin B \cup C \;\Leftrightarrow\; x \in A$ und $x \notin B$ und $x \notin C \;\Leftrightarrow$
[Hier benutzen wir das logische Gesetz: $p \wedge q \wedge r \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$]
$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ und $x \notin B$) und ($x \in A$ und $x \notin C$) $\Leftrightarrow$ $x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C \;\Leftrightarrow\; x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(b) $x \in A \setminus (B \cap C) \;\Leftrightarrow\; x \in A$ und $x \notin (B \cap C) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \in A$ und ($x \notin B$ oder $x \notin C$) $\Leftrightarrow$
$[p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ und $x \notin B$) oder ($x \in A$ und $x \notin C$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C \;\Leftrightarrow\; x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(c) $x \in A \cup (B \cup C) \;\Leftrightarrow\; x \in A$ oder $x \in (B \cap C) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \in A$ oder ($x \in B$ und $x \in C$) $\Leftrightarrow$
$[p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ oder $x \in B$) und ($x \in A$ oder $x \in C$) $\Leftrightarrow$ $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C \;\Leftrightarrow\; x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

A. 2: (a) $x \in \bigcup_{i \in I}(A_i \cap X) \;\Leftrightarrow\; \exists\, i \in I : x \in A_i \cap X \;\Leftrightarrow\; \exists\, i \in I :$ ($x \in A_i$ und $x \in X$) $\Leftrightarrow$ ($\exists\, i \in I : x \in A_i$) und $x \in X \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ und $x \in X \;\Leftrightarrow\; x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap X$.

(b) $x \in X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) \;\Leftrightarrow\; x \in X$ und $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \in X$ und ($\forall i \in I :\; x \notin A_i$) $\Leftrightarrow$ $\forall i \in I :$ ($x \in X$ und $x \notin A_i$) $\Leftrightarrow$
$\forall i \in I :\; x \in (X \setminus A_i) \;\Leftrightarrow\; x \in \bigcap_{i \in I}(X \setminus A_i)$.

A. 3: (a) Wir zeigen: $[a, b] = \bigcap_{\substack{y > b \\ x < a}} (x, y)$.
Wir beobachten:
$a \le \alpha \;\Leftrightarrow\; \forall x < a : x < \alpha$ und analog :
$\alpha \le b \;\Leftrightarrow\; \forall y > b : \alpha < y$.

Also ist : $\alpha \in [a.b] \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \alpha$ und $\alpha \geq b \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \forall \begin{matrix} x < a \\ y > b \end{matrix} : x < \alpha < y \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \bigcap\limits_{\substack{y>b \\ x<a}} (x, y).$

(b) Die Gleichheit $(a, b) = \bigcup\limits_{\substack{y<b \\ x>a}} [x, y]$. kann analog wie in (a) mithilfe von

$a < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x > a : x \leq \alpha,$

$\alpha < b \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y < b : \alpha \leq y.$

gezeigt werden.