3 Gruppenübungen

A. 1: (a) Induktion : n=2 : $\binom{2}{2} = 1 = \binom{2+1}{3}$ ✓

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass es für ein $n \geq 2$ gilt:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}. \tag{1}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}. \tag{2}$$

Beweis: Wegen (1) ist (2) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} &= \binom{n+2}{3} \\ \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} &= \frac{(n+2)(n+1)n}{6} \\ \frac{n-1}{6} + \frac{1}{2} &= \frac{n+2}{6} \\ \frac{n+2}{6} &= \frac{n+2}{6} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit stimmt, also ist der Induktionsbeweis fertig.

(b) Induktion: n=2 : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ✓

Induktionschritt: Wir nehmen an, dass es für ein $n \geq 2$ gilt:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}. \tag{3}$$

Zu zeigen:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}. \tag{4}$$

Wegen (3) ist (4) äquivalent zu:

$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+2}.$$

Die letzte Gleichheit stimmt, also ist der Induktionsbeweis zu Ende.

A. 2: (a) Induktion: n=2 : $\binom{4}{2} = 6 < 8 = \frac{4^2}{2}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass es für ein $n \geq 2$ gilt:

$$\binom{2n}{n} < \frac{1}{2} 4^n \tag{5}$$

Wir wollen zeigen, dass :

$$\binom{2n+2}{n+1} < \frac{4^{n+1}}{2} \tag{6}$$

In der folgenden Abschätzung benutzen wir (5):

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$
$$\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!n!(n+1)^2} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1}$$
$$\overset{(5)}{<} \frac{1}{2} 4^n \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

Der Induktionsbeweis ist zu Ende, wenn wir zeigen können: $\frac{2(2n+1)}{n+1} \leq$ 4

Die Ungleichheit ist äquivalent zu :

$4n + 2 \leq 4n + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq 4$ - stimmt für alle $n \geq 2$.

(b) Induktion: n=2: $2^2 = 4 > 2 = 2^2 - 2$. ✓

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass es für ein $n \geq 2$ gilt:

$$2^n > n^2 - 2. \tag{7}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$2^{n+1} > (n+1)^2 - 2. \tag{8}$$

Wegen (7) erhalten wir :

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2(n^2 - 2)$.

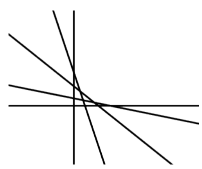
Wenn wir also zeigen, dass $2(n^2-2) \geq (n+1)^2 - 2$ gilt, ist der Beweis fertig. Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
2n^2 - 4 &\geq n^2 + 2n + 1 - 2 \\
n^2 - 2n + 1 &\geq 4 \\
(n-1)^2 &\geq 4 \\
n - 1 &\geq 2 \\
n &\geq 3.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung stimmt erst ab $n = 3$, also müssen wir die Induktion mit $n = 3$ anfangen. Das heißt, wir müssen noch überprüfen, ob die Ungleichung $2^n > n^2 - 2$ für $n = 3$ stimmt! Es ist aber wahr: $2^3 = 8 > 7 = 3^2 - 2$.✓

A. 3: (a) Generieren einer Vermutung am besten durch Betrachtung einiger Beispiele:

Anzahl n der Geraden	max. Anzahl der Schnittpunkte
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10



Vermutung für n Geraden: $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

Beweis mittels Induktion:

IA.: n=1 $\quad \frac{1(1-1)}{2} = 0$ ✓ da bei einer Geraden keine Schnittpunkte möglich sind.

IV.: Wir setzen voraus, dass n Geraden max. $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte haben.

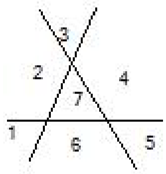
IS.: Die (n+1)-te Gerade kann max. n neue Schnittpunkte liefern (nämlich dann, wenn sie zu keiner der schon vorhandenen Geraden parallel ist und wenn keiner der neuen Schnittpunkte mit einem der alten zusammenfällt).

⇒ Max.Zahl bei n+1 Geraden = Max.Zahl bei n Geraden +n =

$$= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$ □

(b)

n	max.Anzahl der Gebiete
1	2
2	4
3	7
4	11



Vermutung für n Geraden: $1 + \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$

Beweis mittels Induktion:

IA.: n=1 $\quad \frac{1^2 + 1 + 2)}{2} = 2$ ✓ da eine Geraden die Ebene in max. 2Gebiete teilt.

IV.: Wir setzen voraus, dass n Geraden die Ebene in max. $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ Gebiete teilt.

IS.: Die (n+1)-te Gerade schneidet max. n Geraden, durchwandert daher max. n+1 schon vorhandene Gebiete und teil jedes dieser Gebiete in zwei Teile. Dabei entstehen also n+1 neue Gebiete.

⇒ Max.Zahl bei n+1 Geraden = Max.Zahl bei n Geraden + (n+1) =

$$= \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2} \qquad \square$$