4 Gruppenübungen

A. 1: (a) Da $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall m, n \geq 1$ gilt, ist 2 eine obere Schranke der Menge A. Da $2 \in A\,(m = n = 1)$ ist 2 die kleinste obere Schranke. Also ist $\sup A = 2$.

Da $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 0 \quad \forall m, n \geq 1$ gilt, ist 0 eine untere Schranke der Menge A. Um zu zeigen, dass $\inf A = 0$ gilt, müssen wir noch beweisen, dass $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, m, n \geq 1$ mit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon$. Das kann man erreichen, wenn man $m = n > \frac{2}{\varepsilon}$ wählt. Dann gilt: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

<u>Bemerkung:</u> $\frac{2}{\varepsilon}$ erhält man,wenn man die Ungleichung $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} < \varepsilon$ unter der zusätzlichen erlaubten Bedingung: m=n , nach m bzw. n auflöst.

(b) Für $x = 1$ bekommen wir $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1 + y^2}{y} > y$. Da für y eine beliebige positive Zahl gewählt werden kann, ist die Menge B nach oben nicht beschränkt. Das heißt, $\sup B$ existiert nicht.

In der Hausübung 1 haben wir gezeigt, dass $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ ist. Also ist $\frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$. Das bedeutet 2 ist eine untere Schranke der Menge B. Da zusätzlich $2 \in B$ (für $x = y = 1$), ist $\inf B = 2$.

(c) Aus der Ungleichung $\frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$ folgt durch Umstellung $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$, also ist $\frac{1}{2}$ eine obere Schranke der Menge C. Um zu zeigen, dass $\sup C = \frac{1}{2}$ gilt, müssen wir zusätzlich beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x > y > 0 : \frac{xy}{x^2 + y^2} > \frac{1}{2} - \varepsilon. \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{xy}{x^2 + y^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x - y)^2}{2(x^2 + y^2)} < \varepsilon.$$

Wir wählen also $x = y + 1$ und y so groß, dass $2((y + 1)^2 + y^2) > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt. Mit dieser Wahl gilt (1). Also ist $\sup C = \frac{1}{2}$.

Da $\frac{xy}{x^2 + y^2} > 0$ ist, ist 0 eine untere Schranke von C. Um zu zeigen,

dass $\inf C = 0$ ist, müssen wir beweisen: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x > y > 0$ mit $\frac{xy}{x^2 + y^2} < \varepsilon$. Wähle: $y = 1$ und $x > 1$ eine beliebige Zahl mit $x > \frac{1}{\varepsilon}$.
Dann ist $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + 1} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} < \varepsilon$.

Bemerkung: Wieder erhalten wir die Vorraussetzung $x > \frac{1}{\varepsilon}$ durch Auflösen der Ungleichung mit $y = 1$ nach x.

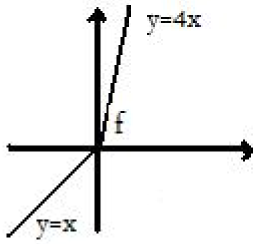
A. 2: (a) Wir benötigen hierfür nur eine Fallunterscheidung:

Sei zuerst $A(x) = \{xa : a \in (1, 4)\}$.

Für $x = 0$ ist $A(0) = \{0\}$, also ist $f(0) = \sup\{0\} = 0$.

Für $x > 0$ ist $A(x) = (x, 4x)$, also ist $f(x) = 4x$.

Für $x < 0$ ist $A(x) = (4x, x)$, also ist $f(x) = x$.



(b) Für $x \geq -2$ ist $x + a \geq -2 + a > 0$. Dann ist $|x + a| = x + a$.

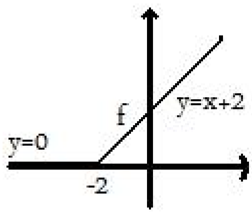
Also ist $f(x) = \inf\{x + a : a \in (2, \infty)\} = x + 2$.

Sei $x < -2$ und B=$\{|x + a| \ : a \in (2, \infty)\}$.

Dann ist $0 \in B$ $(0 = |x + a|$ für $a = -x)$ und $|x + a| \geq 0 \quad \forall a \in (2, \infty)$.

Wir können also a stets so wählen, dass $x + a = 0$ gilt.

Das bedeutet $\inf B = 0$, also ist $f(x) = 0$.



A. 3: Beispiel-Antworten

(a) **Häufige Motivationsfrage in der Schule:** „Kann man den genauen Wert von z.B. $\sqrt{32}$ als Dezimalbruch angeben?" Überraschende Antwort: Nein! $\sqrt{32}$ lässt sich nicht als endliche oder als unendliche, periodische Dezimalzahl schreiben. Oft wird auch der Taschenrechner-Test gemacht: $\sqrt{2}$ wird mit Taschenrechnern (mit unterschiedlich vielen Anzeigestellen) berechnet, der Wert wird notiert, wieder in den TR getippt und quadriert. Keines dieser Ergebnisse ergibt wieder die Zahl 2. Eine andere Motivation ist in manchen Schulbüchern eine geometrische: jeder rationalen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengerade, aber nicht umgekehrt. Oder: man gebe die Länge der Quadratseite für einen gegebenen Flächeninhalt (z.B. $\sqrt{2}$) durch Probieren an!

Einführung in der Schule: Irrationale Zahlen werden fast immer als unendliche, **nicht periodische Dezimalzahlen** eingeführt, die sich in beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen approximieren lassen. Manchmal auch als **Punkte auf der Zahlengerade**, denen keine rationale Zahl entspricht. Es folgt häufig ein Beweis, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist (meist der indirekte Standard-Euklid-Beweis), danach Visualisierungen am Zahlenstrahl zur Intervallschachtelung von $\sqrt{2}$ (es wird dabei bemerkt, dass man jede reelle Zahl mit Hilfe einer Intervallschachtelung darstellen kann). Dabei werden Formulierungen wie „Die Strecken zwischen den jeweiligen Schranken ziehen sich auf den Punkt der Zahl $\sqrt{2}$ zusammen" verwendet. Die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat wird mancherorts thematisiert. Der Begriff der *Vollständigkeit* wird aber in keinem der von mir durchgesehenen deutschen Schulbüchern explizit erwähnt.

(b) Motivation in der Vorlesung ist der Wunsch danach, dass jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzen soll. Die

Menge $M = \{x \in Q | x^2 < 2\}$ besitzt aber kein Supremum. Praktischerweise wird genau dieser Wunsch als Axiom gefordert. Die reellen Zahlen werden dann als Dedekindsche Schnitte (also als Paare von Teilmengen von Q) exakt definiert.

(c) Natürlicher ist wohl die Motivation, Lücken in der Zahlengerade schließen bzw. etwa die Gleichung $x^2 = 2$ lösen zu wollen, als die Motivation, nichtleere nach oben beschränkte Mengen betrachten zu wollen, die ein Supremum besitzen. Historisch ist die Entdeckung der irrationalen Zahlen ja auch dadurch passiert, dass eine Zahl (nämlich der goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck) zwar konstruiert (also auf der Zahlengeraden identifiziert), allerdings nicht auf ein Verhältnis aus natürlichen Zahlen zurückgeführt werden konnte. Nachdem das Rechnen mit den neuen reellen Zahlen in der Schule ohnehin intuitiv passiert, ist die Einführung der irrationalen Zahlen als unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen naheliegend. Die rationalen Zahlen waren ja bisher solche, die man als endliche oder unendliche, aber periodische Dezimalzahlen schreiben kann.

Für das Treiben von **Analysis auf wissenschaftlich exaktem Niveau** reichen die meist unpräzise formulierten Definitionen aus der Schule nicht aus. Wichtig scheint mir zu vermitteln, dass der Zugang, die Formulierung des Vollständigkeitsaxioms und die Definition der reellen Zahlen aus der Vorlesung elaborierte, über lange Zeiträume entwickelte und vor allem **ökonomische Methoden** sind, die in ihrer heutigen Form nicht „vom Himmel gefallen“ sind. Sie genügen aber im Unterschied zu dem in der Schule Gelernten dem Anspruch der Exaktheit, der Prägnanz und schließlich auch der Eleganz unserer Wissenschaft.