5 Gruppenübungen

A. 1: (a) D= $\{x \in \mathbb{R} : \ |x| - 5 \geq 0\} = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$.

Da $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x| - 5} \geq 0$ ist, ist $(-1) \notin f(\mathbb{R})$ also ist f keine surjektive Funktion.

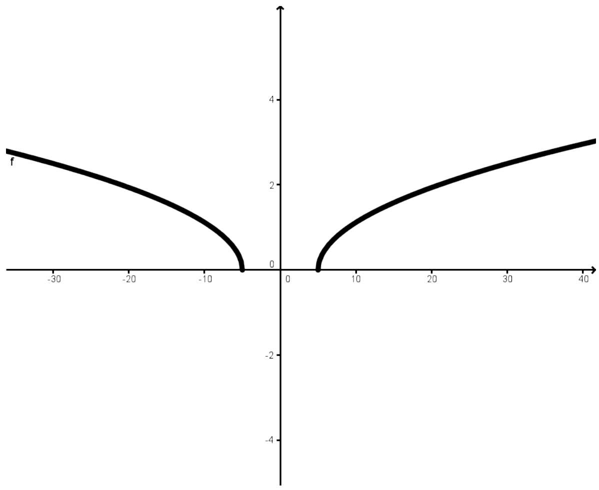
Da $f(5) = f(-5)$ ist, ist f auch keine injekive Funktion und somit keine Bijektion.

$$x \in f^{-1}((-1,1)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in (-1,1) \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{1}{2}\sqrt{|x| - 5} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\text{ da } \sqrt{y} \geq 0 \text{ ist })\frac{1}{2}\sqrt{|x| - 5} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 9$$

und gleichzeitig muss immer noch gelten $|x| \geq 5$.

$$\Rightarrow \quad x \in (-9, -5] \cup [5, 9).$$



Also ist $f^{-1}((-1,1)) = (-9,-5] \cup [5,9)$.

(b) $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x - 4 > 0\} = (4, +\infty)$.

Wir beweisen, dass $f : D \to \mathbb{R}$ surjektiv ist. Sei $y \in \mathbb{R}$.

$1 + \log_2(x-4) = y \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(x-4) = y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 + 2^{y-1}$

Also ist $f(4 + 2^{y-1}) = y$.

Wir beweisen, dass $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist.

$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \log_2(x_1 - 4) = 1 + \log_2(x_2 - 4) \quad \Leftrightarrow$

$\log_2(x_1 - 4) = \log_2(x_2 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 4 = x_2 - 4$ (da log injektiv) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$

Also ist f eine Bijektion und $f^{-1}(y) = 4 + 2^{y-1}$.

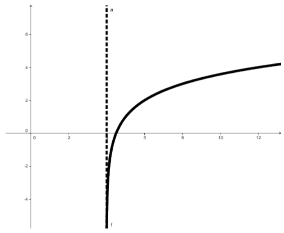
$$x \in f^{-1}((-1,1)) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) \in (-1,1) \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1 + \log_2(x-4) < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2 < \log_2(x-4) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-2} < x - 4 < 2^0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4.25 < x < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(4+\frac{1}{4}, 5\right).$$

Also ist $f^{-1}((-1,1)) = \left(4+\frac{1}{4}, 5\right)$.



A. 2: Es gilt allgemein:

$$y \in f(C) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in C : f(x) = y$$

$$x \in f^{-1}(D) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in D.$$

(a) Damit bekommen wir:

$$x \in f^{-1}(f(C)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in f(C) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, z \in C : f(z) = f(x) \Leftarrow x \in C \text{ (Wähle einfach } z = x\text{)}.$$

Daraus folgt: $C \subseteq f^{-1}(f(C))$. Die Gleichheit $C = f^{-1}(f(C))$ gilt nicht allgemein, da z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Dann ist $f([0,\infty)) = [0,\infty)$ und $f^{-1}([0,\infty)) = \mathbb{R}$, also $f^{-1}(f([0,\infty))) = \mathbb{R} \neq [0,\infty)$.

(b)

$$y \in f(f^{-1}(D)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in f^{-1}(D) : f(x) = y \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, x \in A : f(x) \in D \text{ und } f(x) = y \Rightarrow y \in D$$

Damit ist $f\left(f^{-1}(D)\right) \subseteq D$. Die Gleichheit $D = f(f^{-1}(D))$ gilt nicht allgemein. Z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = x^2$. Dann ist $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$. Also ist $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$.

A. 3:

$$
\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, x \in A \cup B \,:\, f(x) = y \quad \Leftrightarrow \\
&(\exists\, x \in A : f(x) = y) \vee (\exists\, x \in B :\ f(x) = y) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \vee y \in f(B) \ \Leftrightarrow\ y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}
$$