# 6 Gruppenübungen

**A. 1:** Sei $\varepsilon > 0$ fest. Dann bekommen wir:

$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\frac{2n}{n+1} - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$

Wähle also $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $n \geq n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$. Daraus folgt $|a_n - 2| < \varepsilon$.

Wenn $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ist, bekommen wir $n_0 = 200$.

**A. 2:** Wir benutzen die aus der Schule bekannte Formel:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \qquad \text{Daraus folgt:}$$

$$a_n = n(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2}) = \frac{7n}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{7}{\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}+1}.$$

Da die Folge $\frac{7}{n^2}$ gegen 0 konvergiert, konvergiert $1 + \frac{7}{n^2}$ gegen 1. Aus der Eigenschaft ($x_n \to g \Rightarrow \sqrt{x_n} \to \sqrt{g}$ ) folgt, dass $\sqrt{1+\frac{7}{n^2}} \to 1$. Damit konvergiert die Folge $a_n$ und der Grenzwert ist $\frac{7}{2}$.

**A. 3:** (a) $a_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+3}} = (-1)^n \sqrt{\dfrac{n}{4n^2+3}} = (-1)^n \sqrt{\dfrac{\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n^2}}}$. Also ist:

$$-\sqrt{\frac{\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n^2}}} \leq a_n \leq \sqrt{\frac{\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n^2}}}.$$

Da $\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n^2}}} \to 0$, folgt nach Einschließungskriterium $a_n \to 0$.

(b) $b_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2+1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+2n}$. Dann ist

$$0 \leq b_n \leq (2n+1)\frac{1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

(Die Abschätzung erhalten wir, da wir wissen, $\dfrac{1}{n^2}$ ist der größte Summand und es gibt $2n+1$ Summanden.)

Da $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$, ist $b_n \to 0$.

(c) $c_n = \frac{5^n}{n!}$ Dann ist für $n \geq 5$:

$$0 \leq c_n = \underbrace{\frac{5}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{5}}_{\frac{5^4}{4!}} \cdot \underbrace{\frac{5}{6} \cdots \frac{5}{n-1}}_{\text{Faktoren } < 1} \cdot \frac{5}{n} \leq \frac{5^4}{4!} \cdot \frac{5}{n}.$$

Da $\frac{5^4}{4!} \cdot \frac{5}{n} \to 0$, gilt wieder nach dem Einschließungskriterium $c_n \to 0$.

**A. 4:** Wir beweisen, dass die Folge $a_n$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 + a_n}{2 + a_n} \geq a_n \quad \Leftrightarrow \ \ldots \ \Leftrightarrow \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq a_n \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Da $a_n > 0$, stimmt die linke Ungleichung. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$a_n \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

Die Ungleichung beweisen wir durch Induktion: Für n=0 stimmt (1).

Induktionsschritt:

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2 + a_n} = 1 - \frac{1}{2 + a_n} \leq 1 - \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \cdots = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Damit ist (1) bewiesen.

Die Folge $a_n$ ist also monoton wachsend und durch $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ nach oben beschränkt, d.h. sie konvergiert. Sei $g = \lim a_n$. Dann ist

$$g = \frac{1 + g}{2 + g} \quad \Leftrightarrow \quad g^2 + g - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ oder } g = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Da die Folge $a_n$ nur positive Glieder enthält, kann $\frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$ nicht der Grenzwert sein. Also ist $\lim a_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

**A. 5:** Dadurch sind wieder genau die Nullfolgen charakterisiert. Nachdem die obige Aussage ja für alle $\varepsilon > 0$ gilt, gilt sie aber auch für alle Zahlen $\varepsilon_1 := \frac{1}{\varepsilon} > 0$ und kann daher geschrieben werden als:

*Für alle $\varepsilon_1 > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| < \varepsilon_1$ für alle $n \geq n_0$ gilt*

Und das ist wieder genau die Nullfolgendefinition.