7 Gruppenübungen

A. 1: (a) Der Fehler in der Argumentation liegt darin, dass Sarah davon ausgeht, die Zahlenfolge müsse ab irgendeinem Folgenglied ident mit dem Grenzwert sein. Sie kommentiert das mit: „Ist doch logisch!“. Hilfsmittel sollten also versuchen, genau diesen Irrtum auszuräumen. Mit ihren anderen Aussagen hat sie Recht, diese widersprechen allerdings nicht der Grenzwertdefinition.

(b) Eine entsprechende Definition müsste so lauten: „Die Zahl a heißt Grenzwert der Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in N}$, wenn $|a_{n+1} - a| < |a_n - a|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt“. Sie ist nicht äquivalent zur Definition in der Vorlesung, da mit dieser Definition etwa auch die Zahl -1 Grenzwert der Folge $\frac{1}{n}$ wäre.

A. 2: Sei $m \geq n$. Dann ist

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \leq \frac{2}{n+1}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann wähle : $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$. Dann gilt für $n \geq n_0$:

$$n \geq n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1, \text{ d.h. } \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

A. 3: (a) Wir benutzen die Formel: $q + q^2 + \cdots + q^N = q \cdot \dfrac{1 - q^N}{1 - q}$ für $q \neq 1$.

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2^n + 5^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{10}\right)^n + \left(\frac{5}{10}\right)^n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^N}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^N}{4} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Also ist $\lim_{N\to\infty} s_N = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$. Das bedeutet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n} = \frac{5}{4}$.

(b) Da $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ ist , erhalten wir:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Also ist $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = 1$. Das bedeutet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

A. 4: (a) Da $a_n \to 1 (\neq 0)$, divergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Es gilt $\dfrac{1}{1+n^2} < \dfrac{2}{n^2+n} = 2 \cdot \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert (Aufgabe 3b), konvergiert auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

(c) Es gilt: $\dfrac{1}{3n+1} > \dfrac{1}{3n+3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{n+1}$.

Wir wissen aus der Vorlesung , dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergiert, also divergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$.

(d) Es gilt : $n < 2^n$ für $n \geq 1$ (Induktion). Also ist : $\dfrac{n}{3^n} < \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$.