## 8 Gruppenübungen

**A. 1:** (a) $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Dann ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$.
Da $\frac{1}{2} < 1$, konvergiert die Reihe.

(b) $a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$. Dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \to 0$.
Da 0<1, konvergiert die Reihe.

(c) $a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}$. Dann ist
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)(4n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 5 \ldots (4n-3)}{2 \cdot 5 \ldots (3n-1)} = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4}$.
Da $\frac{3}{4} < 1$, konvergiert die Reihe.

**A. 2:** (a) $a_n = (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$. Dann ist: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2} \to \frac{1}{2}$.
Da $\frac{1}{2} < 1$, konvergiert die Reihe.

(b) $a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}$. Dann ist $a_n > 0$ für $n \geq 2$. Wir zeigen:

$a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n-\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow \quad n - \sqrt{n} < n + 1 - \sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 < n+1+2\sqrt{n}$ -stimmt für $n \geq 2$. ✓

Da $a_n \to 0$, konvergiert die Reihe (nach Leibniz).
Da aber $\frac{1}{n-\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ und die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum \frac{1}{n-\sqrt{n}}$, d.h. die gegebene Reihe konvergiert aber nicht absolut.

(c) $\frac{\sqrt{n!+1}}{n!} \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{n!}}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n!}} =: a_n$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$. Da $0 < 1$, konvergiert die Reihe absolut.

**A. 3:** (a) Nein: $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Nach Leibniz konvergiert die Reihe $\sum a_n$, aber die Reihe $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ divergiert.

(b) Ja. Da die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert, ist $|a_n| \to 0$.

Es gibt also eine Zahl $n_0$, sodass für alle $n \geq n_0 : |a_n| \leq 1$. Dann ist :

$a_n^2 \leq |a_n|$ für $n \geq n_0$.

Da die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert, konvergiert auch $\sum a_n^2$.