9 Gruppenübungen

A. 1: (a) A ist beschränkt, da $0 < \frac{1}{n} < 1$ für alle n=1,2,...
A ist nicht offen, denn es gibt kein $\varepsilon > 0$ mit $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset A$.
A ist nicht abgeschlossen, da $\frac{1}{n} \to 0$ und $0 \notin A$.
A ist nicht kompakt, da A nicht abgeschlossen.

(b) A ist beschränkt, da $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \subset (0,1)$ und damit auch
$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\Big) \subset (0,1)$.
A ist offen als Vereinigung von offenen Intervallen.
A ist nicht abgeschlossen, da die Menge aus a) Häufungspunkte unserer Menge beinhaltet, diese aber nicht in A liegen, denn:
$\frac{1}{n_0}$ ist für jedes feste n_0 Häufungspunkt der Folge $a_n = \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n}$, doch diese Häufungspunkte liegen nicht in A.
A ist nicht kompakt, weil A nicht abgeschlossen.

(c) A ist nicht beschränkt, denn für jedes $R > 0$ gibt es ein $q \in A$ mit $q > R$.
A ist nicht offen, denn es gibt kein $\varepsilon > 0$ mit $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset A$
(in jeder offenen Umgebung gibt es eine irrationale Zahl).
A ist nicht abgeschlossen, da wir bereits wissen, es gibt auch Folgen aus $\mathbb{Q}$ die gegen eine irrationale Zahl konvergieren.
A ist nicht kompakt, da A nicht beschränkt ist.

A. 2: (a) Wir zeigen, dass f in x_0 stetig ist, $\Leftrightarrow$ $x_0 \notin \mathbb{Z}$
Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$.
Dann ist für $[x_0 - \frac{1}{n}] = x_0 - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 - 1$,
aber für $n \geq 2$ gilt: $[x_0 + \frac{1}{n}] = x_0 \to x_0 \neq x_0 - 1$.
Das bedeutet f ist in x_0 nicht stetig.
Sei nun $x_0 \notin \mathbb{Z}$.
Sei weiterhin x_n eine beliebige Folge, die gegen x_0 konvergiert. Dann gibt es ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:
$x_n \in ([x_0], [x_0]+1)$. Damit ist $[x_n] = [x_0]$ für alle $n \geq n_0$,
also $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n] = [x_0]$. Das bedeutet f ist stetig in x_0.

(b) Sei $x_0 \notin \mathbb{Z}$.

Da $[x]$ in x_0 stetig ist und $(1-x)$ auch, ist $[x](1-x)$ in x_0 stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Dann ist (für eine Folge von links): $\left[x_0 - \frac{1}{n}\right]\left(1 - \left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\right) =$
$= (x_0 - 1)\left(1 - x_0 + \frac{1}{n}\right).$ (für $n \geq 2$)

Für $n \to \infty$ geht dies gegen $-(x_0-1)^2$.

Weiter gilt (für eine Folge von rechts): $\left[x_0 + \frac{1}{n}\right]\left(1 - \left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right) =$
$= x_0\left(1 - x_0 - \frac{1}{n}\right) \to x_0(1-x_0)$.

Dies sind also die Grenzwerte: $-(x_0-1)^2$ und $x_0(1-x_0)$.

Für die Stetigkeit müssen diese Grenzwerte gleich sein!

$-(x_0-1)^2 = x_0(1-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 1$, d.h. wenn $x_0 \in \mathbb{Z}$ und $x_0 \neq 1$,
dann ist f nicht stetig in x_0.

Wir zeigen nun, dass f in $x_0 = 1$ stetig ist:

Sei x_n eine Folge die gegen 1 konvergiert. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$:

$\left|[x_n](1-x_n)\right| = \left|[x_n]\right|\left|1-x_n\right| \leq \left|1-x_n\right| \to 0$ für $n \to +\infty$

Also ist $\lim_{n\to\infty}[x_n](1-x_n) = 0 = [1](1-1) = f(1)$.

Hiermit ist f stetig in $x_0 = 1$.

A. 3: Sei $x_0 > 0$. Wir zeigen, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ in x_0 stetig ist:

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta = \min(\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}\varepsilon x_0^2)$.

Dann gilt für alle x mit $|x - x_0| < \delta$:

$|x - x_0| < \frac{1}{2}x_0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}x_0$.

Daraus folgt wiederrum für alle x mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{xx_0} < \frac{\delta}{\frac{1}{2}x_0^2} \leq \frac{\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2}{\frac{1}{2}x_0^2} = \varepsilon.$$