Analysis I, Globalübung 1

Aufgabe 1: a) $|3x| + 2 \leq |x-6| \quad (*)$

$$|3x| = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases} \qquad |x-6| = \begin{cases} x-6, & x \geq 6 \\ 6-x, & x < 6 \end{cases}$$

1. Fall: $x < 0,\ x < 6$:

$$(*) \Leftrightarrow -3x+2 \leq 6-x$$
$$\Leftrightarrow -4 \leq 2x$$
$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

Alle $x \in \underbrace{[-2,\infty) \cap (-\infty,0)}_{=[-2,0)}$ lösen $(*)$

2. Fall: $0 \leq x,\ x < 6$:

$$(*) \Leftrightarrow 3x+2 \leq 6-x$$
$$\Leftrightarrow 4x \leq 4$$
$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

$x \in [0,6) \cap (-\infty,1] = [0,1]$ löst $(*)$.

3. Fall: $0 \leq x,\ 6 \leq x$:

$$(*) \Leftrightarrow 3x+2 \leq x-6$$
$$\Leftrightarrow 2x \leq -8$$
$$\Leftrightarrow x \leq -4$$

$[6,\infty) \cap (-\infty,-4] = \emptyset$.

Keine weitere Lösung

4. Fall: $x < 0,\ x \geq 6$

Solche Zahlen x gibt es nicht; keine weitere Lösung.

Insgesamt lösen alle $x \in [-2,0) \cup [0,1] = [-2,1]$ die Ungleichung $(*)$.

b) $|x^2 - 25| \leq 24 \quad (**)$

$$|x^2-25| = \begin{cases} x^2-25 & \text{für } x^2 \geq 25, \text{ also } x \geq 5 \text{ oder } x \leq -5 \\ 25-x^2 & \text{für } x^2 < 25, \text{ also } -5 < x < 5 \end{cases}$$

1. Fall: $-5 < x < 5$

$$(**) \Leftrightarrow 25 - x^2 \leq 24$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq x^2$$

$x \in [-1,1] \cap (-5,5)$
$= [-1,1]$ löst $(**)$

2. Fall: $x \leq -5$ oder $x \geq 5$

$$(**) \Leftrightarrow x^2 - 25 \leq 24$$
$$\Leftrightarrow x^2 \leq 49$$
$$\Leftrightarrow -7 \leq x \leq 7$$

$[-7,7] \cap ((-\infty,-5] \cup [5,\infty)) = [-7,-5] \cup [5,7]$

Insgesamt: Alle $x \in [-7,-5] \cup [-1,1] \cup [5,7]$ sind Lösungen von $(**)$.

c) $|x| + |x+1| + |x+2| = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$ (* * *)

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$ $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$

1. $x < -2$:

$(***) \Leftrightarrow -x-x-1-x-2 = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 5x + \frac{56}{9}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{56}{9}}$

$= \frac{-15 \pm \sqrt{225-224}}{6}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = -\frac{8}{3}}_{<-2} \vee \underbrace{x = -\frac{7}{3}}_{<-2}$

2. $-2 \leq x < -1$:

$(***) \Leftrightarrow -x-x-1+x+2 = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 3x + \frac{20}{9}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = -\frac{5}{3}}_{\in[-2,-1)} \vee \underbrace{x = -\frac{4}{3}}_{\in[-2,-1)}$

3. $-1 \leq x < 0$:

$(***) \Leftrightarrow -x+x+1+x+2 = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 + x + \frac{2}{9}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = -\frac{2}{3}$

4. $x \geq 0$:

$(***) \Leftrightarrow x+x+1+x+2 = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 - x + \frac{2}{9}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ löst } (***)\} = \{-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

d) $|x+10| = |2x+1| + 3$ (* * * *)

$|x+10| = \begin{cases} x+10, & x \geq -10 \\ -x-10, & x < -10 \end{cases}$ $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

1. $x < -10$:

$(****) \Leftrightarrow -x-10 = -2x-1+3$

$\Leftrightarrow x = 12 \notin (-\infty, -10)$

2. $-10 \leq x < -\frac{1}{2}$:

$(****) \Leftrightarrow x+10 = -2x-1+3$

$\Leftrightarrow 3x = -8$

$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3} \in [-10, -\frac{1}{2})$

3. $x \geq -\frac{1}{2}$:

$(****) \Leftrightarrow x+10 = 2x+1+3$

$\Leftrightarrow \underset{-\frac{1}{2}}{\overset{\geq}{6}} = x$

$\{x \mid |x+10| = |2x+1| + 3\} = \{-\frac{8}{3}, 6\}$

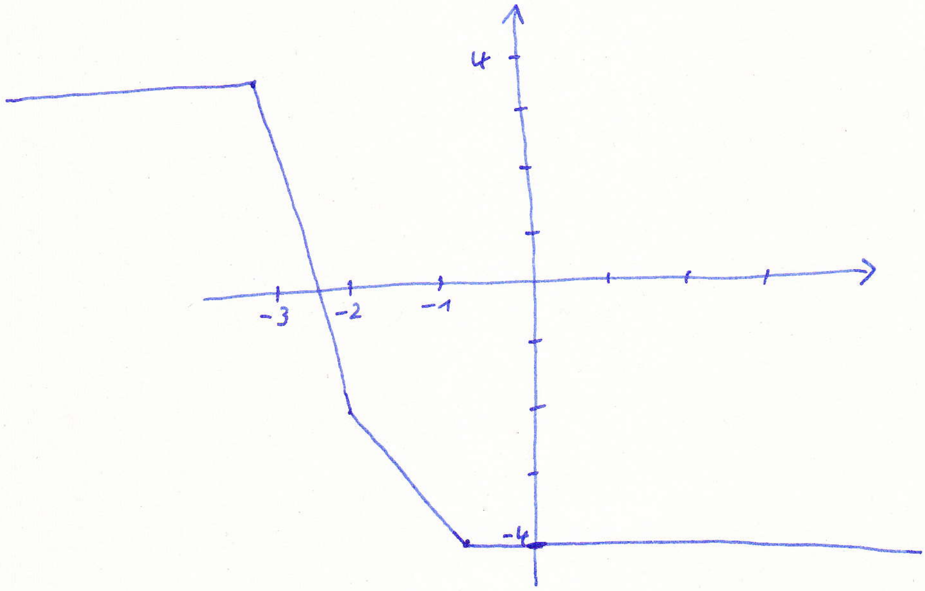
Aufgabe 2: a) $f(x) = |x+1| + |2x+4| - |3x+9|$

$x < -3: \quad f(x) = -(x+1) - (2x+4) + (3x+9) = 4$

$-3 \leq x < -2: \quad f(x) = -(x+1) - (2x+4) - (3x+9) = -6x - 14$

$-2 \leq x < -1: \quad f(x) = -(x+1) + (2x+4) - (3x+9) = -2x - 6$

$-1 \leq x \quad : \quad f(x) = (x+1) + (2x+4) - (3x+9) = -4$

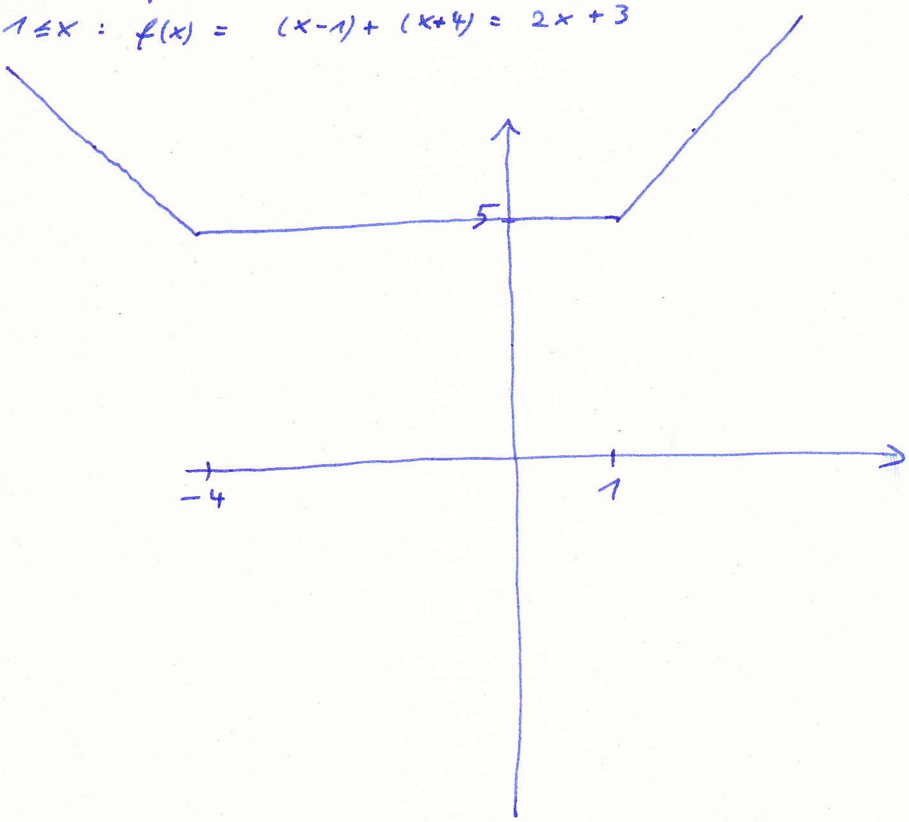


b) $f(x) = |x-1| + |x+4|$

$x < -4 : \quad f(x) = -(x-1) - (x+4) = -2x - 3$

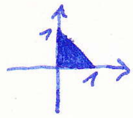
$-4 \leq x < 1 : \quad f(x) = -(x-1) + (x+4) = 5$

$1 \leq x : \quad f(x) = (x-1) + (x+4) = 2x + 3$



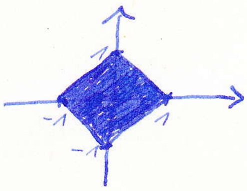
Aufgabe 3: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x|+|y| \leq 1$

In dem Quadranten des $\mathbb{R}^2$, in dem $x \geq 0$ und $y \geq 0$ ist, ist die Ungleichung gleichbedeutend mit $y \leq 1-x$, wird also von den Punkten erfüllt, die auf der Geraden $y = 1-x$ oder unterhalb davon liegen:



Für die anderen Quadranten sieht das Bild genauso aus, nur eben an den Achsen gespiegelt.

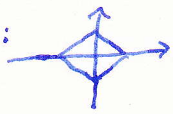
Insgesamt ergibt sich die folgende Menge:



Aufgabe 4: Die Frage nach der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} |x|+|y| = 1 \\ |x| + a = y \end{cases}$$

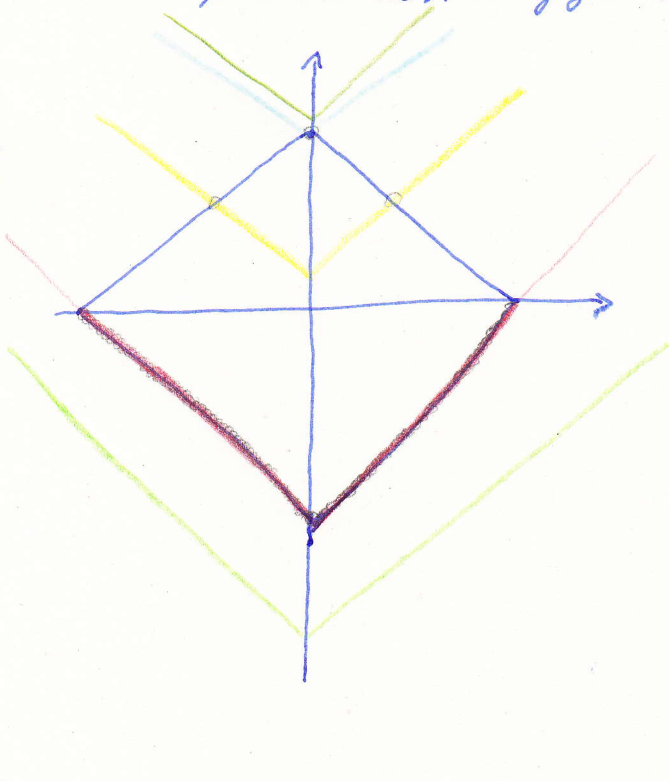
lässt sich am einfachsten graphisch beantworten.

Die erste Gleichung ergibt dabei folgende Figur: 

(vgl. auch Aufgabe 3), die zweite 

einen um a verschobenen Graphen der Betragsfunktion.

Gesucht ist die Anzahl der Schnittpunkte in Abhängigkeit von a.



Keine Lösung für $a < -1$ oder $a > 1$

eine Lösung für $a = 1$

zwei Lösungen für $-1 < a < 1$

unendlich viele Lösungen für $a = -1$.

Aufgabe 5: a) $x \le |x|$

gilt. Im Fall $x \geq 0$ gilt sogar Gleichheit und für $x<0$ lässt die Aussage sich sofort daraus erkennen, dass der Betrag nichtnegativ ist: $x < 0 \le |x|$.

b) $1 \le |1+x|+x$ gilt nicht immer: Wähle $x=-1$.

$1 \le |0|-1 \Leftrightarrow 1 \le -1$ ↯

c) $-1 \le |-1+x|+x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Fall: $x<1$ $(c) \Leftrightarrow -1 \le 1-x+x \Leftrightarrow -1 \le 1$ ✓

2. Fall: $x \geq 1$ $(c) \Leftrightarrow -1 \le -1+x+x \Leftrightarrow 0 \le 2x \Leftrightarrow x \geq 0$, gilt, da $x \geq 1$.

d) $1 \le |1-x|+x$ gilt wegen (a):

$(d) \Leftrightarrow 1-x \le |1-x| \Leftrightarrow y \le |y|$ (mit $y=1-x$)

e) $x \le |x+1|+1$

1. Fall $x<-1$: $(e) \Leftrightarrow x \le -x-1+1 \Leftrightarrow 2x \le 0$ ✓

2. Fall $x \geq -1$: $(e) \Leftrightarrow x \le x+1+1 \Leftrightarrow 0 \le 2$ ✓

f) $-x \le |-x+1|+1$ gilt für alle reellen Zahlen

$(f) \Leftrightarrow -1 \le |-x+1|+x \Leftrightarrow -1 \le |-1+x|+x \Leftrightarrow (c)$

g) $-x \le |-x-1|+1$ gilt, ist eine Variante von a) mit „$-x-1$" statt „x".

$(g) \Leftrightarrow -x-1 \le |-x-1|$

Aufgabe 6: a) $[x] = 2x$

Da links des Gleichheitszeichens eine ganze Zahl steht, muss auch der Ausdruck rechts eine ganze Zahl sein, d.h. x sich darstellen lassen als Hälfte einer ganzen Zahl: $x = \frac{z}{2}$ für ein $z \in \mathbb{Z}$.

1. Fall: z gerade, also $z=2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{2k}{2} = k$$

$$\begin{aligned} & [x] = 2x \\ \Leftrightarrow\ & [k] = 2k \\ \Leftrightarrow\ & k = 2k \\ \Leftrightarrow\ & k = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{2 \cdot 0}{2} = 0. \end{aligned}$$

2. Fall: z ungerade, also $z = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & [x] = 2x \\ \Leftrightarrow\ & [k+\tfrac{1}{2}] = 2k+1 \\ \Leftrightarrow\ & k = 2k+1 \\ \Leftrightarrow\ & k = -1 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{2(-1)}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $[x] \le |x|$

$[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x, also ist insbesondere $[x] \le x$. Ferner gilt $x \le |x|$ (vgl. Aufgabe 5a)), d.h. insgesamt

$[x] \le x \le |x| \Rightarrow [x] \le |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7: $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ = Menge der geraden Zahlen

$B = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ = Menge der Zahlen, die durch 3 geteilt den Rest 1 ergeben

$A \cup B = \{z \in \mathbb{Z} \mid z = 2m \vee z = 3n+1,\ m,n \in \mathbb{Z}\}$

Menge aller geraden Zahlen und aller Zahlen, die bei Division durch 3 Rest 1 ergeben.

$A \cap B = \{6n+4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Menge aller geraden Zahlen, die um 1 größer sind als ein Vielfaches von 3.

$A \setminus B = \{6n, 6n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Menge aller geraden Zahlen, die nicht um 1 (sondern um 0 oder 2) größer sind als ein Vielfaches von 3.

Aufgabe 8: a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C).
\end{aligned}
$$

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cap B) \times C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \in B \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9: $\mathcal{F}$ die Familie aller offenen Intervalle, die die 0 enthalten.

$$\bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = \{0\}$$

1. $0 \in \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I$. Klar, denn jedes $I \in \mathcal{F}$ enthält die 0; so ist $\mathcal{F}$ gewählt.

2. Sei $a \neq 0$. Dann gilt: $a \notin \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I$,

das heißt, es gibt mindestens ein offenes Intervall, das die Null enthält, aber nicht a.

Da $a \neq 0$, ist $|a| > 0$, also $\left(-\frac{|a|}{2}, \frac{|a|}{2}\right)$ ein offenes Intervall, das die 0 enthält, aber nicht a. $\blacksquare$