Analysis I, Globalübung 2

Aufgabe 1: a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

IA: $n=1$: $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ ✓

IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein $n\in\mathbb{N}$, n beliebig, fest.

IS: Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{IV}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Beachte zunächst: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (*)

Bew: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (\frac{n}{2}+1)(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Beweis der Aussage b) mit vollständiger Induktion:

$n=1$: $1^3 = 1^2$ ✓

IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ für ein beliebiges, festes $n\in\mathbb{N}$.

Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{IV}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1)$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2.$$

c) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

$n=1$: $1\cdot 2^{1-1} = 1 = (1-1)\cdot 2^1 + 1$

IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ für ein $n\in\mathbb{N}$.

Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1} k 2^{k-1} = n\cdot 2^{n+1} + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} + (n+1)\cdot 2^n \overset{IV}{=} (n-1)\cdot 2^n + 1 + (n+1)\cdot 2^n$$

$$= 2^n(n-1+n+1) + 1 = 2^n\cdot 2n + 1$$

$$= n\cdot 2^{n+1} + 1$$

d) $\prod_{k=0}^{n} (2^{2^k}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$

$n=0$: $2^{2^0}+1 = 2+1 = 3 = 4-1 = 2^{2^{0+1}} - 1$.

IV: Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\prod_{k=0}^{n} (2^{2^k}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$.

Dann gilt auch $\prod_{k=0}^{n+1} (2^{2^k}+1) = 2^{2^{n+2}} - 1$.

$$\prod_{k=0}^{n+1} (2^{2^k}+1) = \prod_{k=0}^{n} (2^{2^k}+1) \cdot (2^{2^{n+1}}+1) \overset{IV}{=} (2^{2^{n+1}} - 1)(2^{2^{n+1}}+1)$$

$$= \left(2^{2^{n+1}}\right)^2 - 1 = 2^{2 \cdot 2^{n+1}} - 1 = 2^{2^{n+2}} - 1 \qquad \boxtimes$$

Aufgabe 2: $\prod_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \frac{n((n-1)!)^2}{2^{n-1}}$ für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

$n=2$: $\binom{2}{2} = 1 = \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{2 \cdot (1!)^2}{2^1}$

IV: Es gelte $\prod_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \frac{n((n-1)!)^2}{2^{n-1}}$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Dann gilt auch $\prod_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \frac{(n+1)(n!)^2}{2^n}$.

$$\prod_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \prod_{k=2}^{n} \binom{k}{2} \cdot \binom{n+1}{2} \overset{IV}{=} \frac{n((n-1)!)^2}{2^{n-1}} \binom{n+1}{2} = \frac{n\,(n-1)!\,(n-1)!}{2^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)\,n}{2}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)! \cdot n\,(n-1)!}{2^n} = \frac{(n+1)\,n! \cdot n!}{2^n} = \frac{(n+1)\,(n!)^2}{2^n} \qquad \boxtimes$$

Aufgabe 3: a) $100n < 2^n + 577$

$100 < 2 + 577$	$400 < 2^4 + 577$
$200 < 2^2 + 577$	$500 < 2^5 + 577$
$300 < 2^3 + 577$	$600 < 641 = 2^6 + 577$

Für $n \geq 7$ mit vollständiger Induktion:

$n=7$: $700 < 705 = 128 + 577 = 2^7 + 577$.

IV: Es gelte $100n < 2^n + 577$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$.

Dann gilt auch $100(n+1) < 2^{n+1} + 577$.

$$100(n+1) = 100n + 100 \overset{IV}{<} 2^n + 577 + 100 < 2^n + 577 + 2^7$$

$$\leq 2^n + 577 + 2^n = 2 \cdot 2^n + 577 = 2^{n+1} + 577.$$

b) $10n < 2^n + 25$

$10 < 2+25$, $20 < 2^2+25$ $\quad 30 < 8+25 = 2^3+25$

IA: $n=4$: $40 < 41 = 16+25 = 2^4+25$.

IV: Es gelte $10n < 2^n+25$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Dann gilt auch $10(n+1) < 2^{n+1}+25$.

$$10(n+1) = 10n+10 \overset{IV}{<} 2^n+25+10 < 2^n+25+16 = 2^n+25+2^4 \leq 2^n+2^n+25 = 2^{n+1}+25$$

c) $10n < (3+(-1)^n)^n + 23$

IA:

$n=1$: $10 \cdot 1 < 25 = (3+(-1)^1)^1+23$

$n=2$: $10 \cdot 2 < 16+23 = (3+(-1)^2)^2+23$ $\quad n=3$: $10 \cdot 3 < 31 = 2^3+23 = (3+(-1)^3)^3+23$

IV: Es gelte $10n < (3+(-1)^n)^n+23$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Dann gilt auch $10(n+2) < (3+(-1)^{n+2})^{n+2}+23$.

n gerade:

$$10(n+2) = 10n+20 \overset{IV}{<} (3+(-1)^n)^n+23+20 = 4^n+23+20 < 4^n+23+3\cdot 4^2$$

$$\leq 4^n+23+3\cdot 4^n = 4^{n+1}+23 < 4^{n+2}+23 = (3+(-1)^{n+2})^{n+2}+23$$

n ungerade:

$$10(n+2) = 10n+20 \overset{IV}{<} 2^n+23+20 < 2^n+23+2^3+2^4 \overset{n\geq 3}{\leq} 2^n+23+2^n+2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1}+2^{n+1}+23 = 2^{n+2}+23 = (3+(-1)^{n+2})^{n+2}+23 \quad \square$$

Aufgabe 4: $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$, $n \geq 2$

IA: $n=2$: $\binom{2\cdot 2}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6 > 4 = 2^2 = \frac{2^{2\cdot 2-1}}{2}$.

IV: Es gelte $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$ für ein $n \geq 2$.

Dann gilt auch $\binom{2(n+1)}{n+1} > \frac{2^{2(n+1)-1}}{n+1}$.

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+2-n-1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)\cdot n!\,(n+1)\,n!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \overset{IV}{>} \frac{2\cdot(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{n} = \frac{2^{2n}}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n}$$

$$> \frac{2^{2n}}{n+1} \cdot \frac{2n+0}{n} = \frac{2^{2n}}{n+1} \cdot 2 = 2^{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \quad \square$$

Aufgabe 5: $\sum_{k=1}^{n} k^k + \frac{n(n+1)}{2}$ ist gerade für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^k + \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k^k + \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (k^k + k)$$

IA: $n=1$: $1^1 + 1 = 2$ ist gerade.

IV: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\sum_{k=1}^{n}(k^k+k)$ gerade.

Dann ist auch $\sum_{k=1}^{n+1}(k^k+k)$ gerade.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k^k+k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(k^k+k)}_{\text{gerade nach IV.}} + (n+1)^{n+1} + n+1$$

Zu zeigen ist also noch: $(n+1)^{n+1} + n+1$ ist gerade.

Falls n ungerade ist, ist $n+1$ gerade und somit $(n+1)^{\text{irgendetwas}}$ auch, also $(n+1)^{n+1} + n+1$ ebenfalls.

Falls n gerade ist, ist $n+1$ ungerade, $(n+1)^{n+1}$ also auch; die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, also ist $(n+1)^{n+1} + (n+1)$ gerade.

Aufgabe 6: $A(1)$, $A(2)$

$A(n) \Rightarrow A(n^2)$ (1)

$A(n) \Rightarrow A(n-1)$ für $n \geq 2$ (2)

$A(2^{2^N})$ gilt für $N \geq 0$.

$N=0$: $A(2^{2^0}) = A(2)$ gilt nach Voraussetzung.

IV: Es gelte $A(2^{2^N})$. Dann gilt auch $A(2^{2^{N+1}})$.

$A(2^{2^{N+1}}) = A(2^{2 \cdot 2^N}) = A((2^{2^N})^2)$

Nach IV gilt $A(2^{2^N})$ und mit (1) folgt die Gültigkeit von $A((2^{2^N})^2)$.

Gilt $A(M)$ für eine Zahl $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, so gilt $A(n)$ für alle n mit $1 \leq n \leq M$. Dies folgt durch wiederholte Anwendung von (2).
Da es nun zu jeder natürlichen Zahl n eine größere natürliche Zahl gibt, für die die Aussage gilt, (nämlich z.B. 2^{2^n}), gilt sie für alle natürlichen Zahlen.

Aufgabe 7: $B(1)$ stimmt, $B(n) \Rightarrow B(2n)$ $(n \geq 12 \land B(n)) \Rightarrow B(n-11)$.

Dann muss B nicht für alle natürlichen Zahlen gelten.

sei $B(n)$ die Aussage: „n ist nicht durch 11 teilbar".

$B(1)$ gilt.

Es gelte $B(n)$, sei also n eine nicht durch 11 teilbare Zahl.

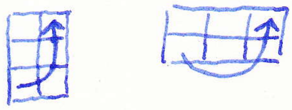
Dann ist auch $2n$ nicht durch 11 teilbar, es gilt also $B(2n)$.

Es gelte $B(n)$ für ein $n \geq 12$.

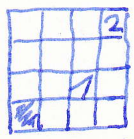
n nicht durch 11 teilbar $\Rightarrow$ $n-11$ nicht durch 11 teilbar, d.h. $B(n-11)$.

Alle genannten Bedingungen sind also erfüllt.

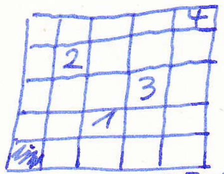
Dennoch ist $B(11)$ offensichtlich falsch.

Aufgabe 8: Zug eines Springers: 

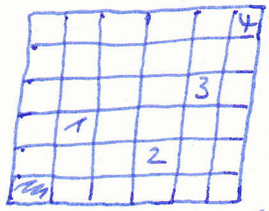
IA: Auf einem 4×4-Brett:



5×5:



6×6:



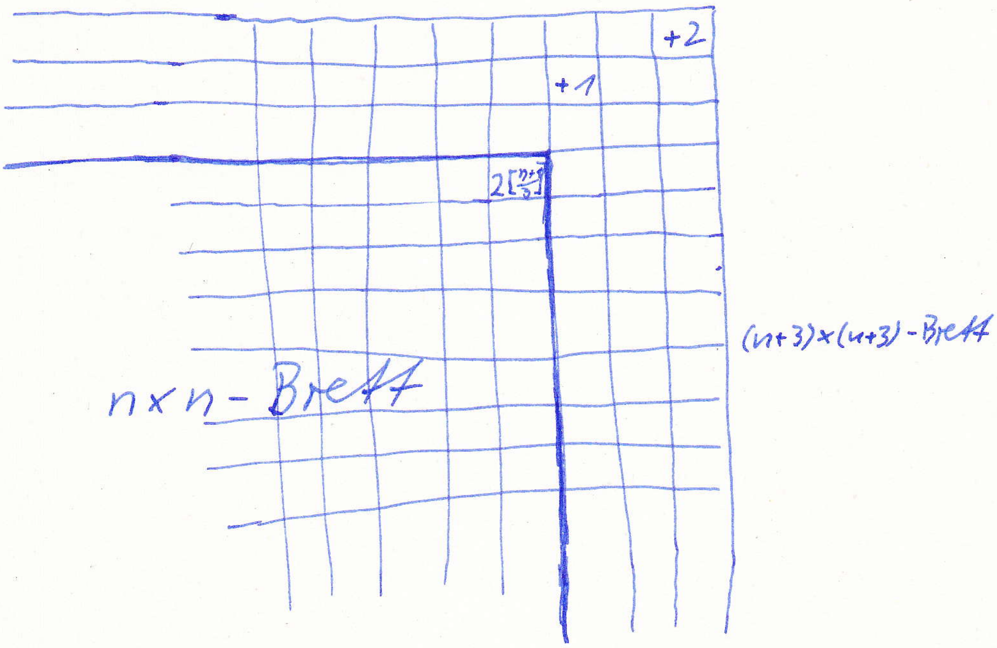
$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \left[\frac{4+1}{3}\right]$ $\quad 4 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot \left[\frac{5+1}{3}\right]$ $\quad 4 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot \left[\frac{6+1}{3}\right]$

IV: Der Springer könne auf einem $n \times n$-Brett das rechte obere Feld in $2 \cdot \left[\frac{n+1}{3}\right]$ Zügen erreichen.

Dann kann er das rechte obere Feld eines $(n+3)\times(n+3)$-Bretts in $2 \cdot \left[\frac{n+3+1}{3}\right]$ Zügen erreichen.

$2 \cdot \left[\frac{n+3+1}{3}\right] = 2\left[\frac{n+1}{3} + 1\right] = 2\left(\left[\frac{n+1}{3}\right] + 1\right) = 2 \cdot \left[\frac{n+1}{3}\right] + 2$ Züge

sind genau 2 Züge mehr als auf dem $n \times n$-Brett.



Aufgabe 9: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4}$

Dazu Beweis der Aussage $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$, aus der die Behauptung direkt folgt.

IA: $n=1$: $\frac{1}{1} \leq 1 = \frac{5-1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2\cdot 1\cdot(1+1)}$

IV: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$ für beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$.

IS: Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \overset{IV}{\leq} \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^3}$$

Dies soll $\leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ sein, zu zeigen ist also noch

$$-\frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq -\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(n+1)^2+2n}{2n(n+1)^3} \leq -\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n^2-2n-1+2n}{n\cdot(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{n(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow (n^2+1)(n+2) \geq n(n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow n^3+2n^2+n+2 \geq n^3+2n^2+n$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 0 \qquad \boxtimes$$

Aufgabe 10: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ für $n \geq 1$.

$$u_{n+2}\cdot u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

IA: $n=1$

$$u_3\cdot u_1 - u_2^2 = 2\cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^{1+1}.$$

IV: Es gelte $u_{n+2}\cdot u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt auch $u_{n+3}\cdot u_{n+1} - u_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$.

$$u_{n+3}\cdot u_{n+1} - u_{n+2}^2 = (u_{n+2}+u_{n+1})u_{n+1} - u_{n+2}^2 = u_{n+2}u_{n+1} + u_{n+1}^2 - u_{n+2}^2$$

$$= u_{n+2}(u_{n+1} - u_{n+2}) + u_{n+1}^2 = -u_n u_{n+2} + u_{n+1}^2$$

$$= (-1)(u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2) \overset{IV}{=} (-1)(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \qquad \boxtimes$$

Aufgabe 11: $p(n)$: Anzahl der Primzahlen $\leq n$. Gesucht: alle $n \in \mathbb{N}$ mit $p(n) \leq \frac{n}{2}$.

$p(1)=0$ ✓ $p(2)=1$ ✓ ~~$p(3)=2$~~ $p(4)=2$ ✓ ~~$p(5)=3$~~ $p(6)=3$ ✓

~~$p(7)=4$~~ $p(8)=4$ ✓ $p(9)=4$ ✓ $p(10)=4$ ✓ $p(11)=5$ ✓ $p(12)=5$ ✓ ...

1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12 gehören also auf jeden Fall zu den gesuchten Zahlen und es drängt sich darüberhinaus folgende Vermutung auf:

$$p(n) \leq \frac{n}{2} \quad \text{für alle } n \geq 8.$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

IA: $p(8) = 4 \leq \frac{8}{2}$ $\quad p(9) = 4 \leq \frac{9}{2}$

IV: Es gelte $p(n) \leq \frac{n}{2}$ für beliebiges, festes $n \geq 8$.

Dann ist
$$p(n+2) = \begin{cases} p(n), & \text{falls } n+1 \text{ und } n+2 \text{ keine Primzahlen} \quad (I) \\ p(n)+1, & \text{falls entweder } n+1 \text{ oder } n+2 \text{ Primzahl} \quad (II) \\ p(n)+2, & \text{falls } n+1 \text{ und } n+2 \text{ Primzahlen} \quad (III) \end{cases}.$$

Fall (III) kann dabei nicht auftreten, da entweder $n+1$ oder $n+2$ gerade ist, demnach von 2 geteilt wird und somit keine Primzahl sein kann.

Insgesamt gilt also $p(n+2) \leq p(n)+1 \overset{\text{IV}}{\leq} \frac{n}{2}+1 = \frac{n+2}{2}$,

also gilt die „Vermutung" auch für $n+2$.

Damit gilt sie für alle $n \geq 8$ und somit ist

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \leq \tfrac{n}{2}\} = \mathbb{N} \setminus \{3, 5, 7\}.$$

Aufgabe 12: $f: X \to Y$ Funktion, $A, B \subseteq Y$, $B_i \subseteq Y$ $(i \in I)$

Bemerkung: f^{-1} bezeichnet das Urbild und nicht etwa eine Umkehrfunktion.

a) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

$x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \exists i \in I: f(x) \in B_i$

$\Leftrightarrow \exists i \in I: x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

b) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

$x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall i \in I: f(x) \in B_i$

$\Leftrightarrow \forall i \in I: x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

c) $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$

$x \in f^{-1}(B\setminus A) \Leftrightarrow f(x) \in B \setminus A \Leftrightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \notin A$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$.

Aufgabe 13: a) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}(Y\setminus B_i)\right) = X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)\right)$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}(Y\setminus B_i)\right) \overset{12b)}{=} \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y\setminus B_i) \overset{12c)}{=} \bigcap_{i\in I}\left(f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B_i)\right)$$

$$= \bigcap_{i\in I}\left(X\setminus f^{-1}(B_i)\right) \overset{\text{De Morgan'sche Regeln}}{=} X\setminus \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

b) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}(Y\setminus B_i)\right) = X\setminus \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}(Y\setminus B_i)\right) \overset{12a)}{=} \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y\setminus B_i) \overset{12c)}{=} \bigcup_{i\in I}\left(f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B_i)\right)$$

$$= \bigcup_{i\in I}\left(X\setminus f^{-1}(B_i)\right) \overset{\text{De Morgan}}{=} X\setminus \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) .$$

Aufgabe 14: $f: X \to Y$ Funktion, $A,B \subseteq X$.

a) $f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$ gilt.

Sei $y\in f(A)\setminus f(B)$.

Dann ist $y\in f(A)$. Das heißt, es gilt $x_1\in A$ mit $f(x_1)=y$.
Ferner ist $y\notin f(B)$. Das heißt, für alle $x_2\in B$ ist $f(x_2)\neq y$.
Also ist $x_1\notin B$, denn $f(x_1)=y$. Damit gilt $x_1\in A\setminus B$ und somit ist $y=f(x_1)\in f(A\setminus B)$
und demnach $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$.

b) $f(A)\setminus f(B) \supseteq f(A\setminus B)$

Diese Aussage gilt im Allgemeinen nicht.

$X=\{1,2\}$, $Y=\{3\}$ $f(1)=f(2)=3$

$f(\{1,2\})=\{3\}$, $f(\{2\})=\{3\}=f(\{1\})$

$f(\{1,2\})\setminus f(\{2\}) = \emptyset \not\supseteq \{3\} = f(\{1,2\}\setminus\{2\})$.

Sei f zusätzlich injektiv. In diesem Fall gilt $f(A)\setminus f(B)\supseteq f(A\setminus B)$ und damit $f(A)\setminus f(B) = f(A\setminus B)$.

Sei $y\in f(A\setminus B)$. Dann gibt es $x_1\in A\setminus B$ mit $f(x_1)=y$ und (da f injektiv) $y\neq f(x_2)$ für alle $x_2\neq x_1$.
Es gilt $x_1\in A$ und $x_1\notin B$ und damit $y=f(x_1)\in f(A)$; für alle $x_2\in B$ ist $x_1\neq x_2$ und demzufolge $f(x_2)\neq y$, folglich $y\notin f(B)$, also insgesamt $y\in f(A)\setminus f(B)$ $\blacksquare$