# Analysis I, Globalübung 3

Aufgabe 1: $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (x > -1,\ n \in \mathbb{N})$

$1 + x \geq \sqrt[n]{1+nx} \quad (x > 0,\ n \in \mathbb{N})$

Damit dies zu einer Aussage über $\sqrt[n]{a}$ wird, wähle $x$ so, dass $a = 1 + nx \Leftrightarrow x = \frac{a-1}{n}$.

Dann gilt $1 + \frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a}$. Ferner ist, da $a > 1$ ist, $\sqrt[n]{a} \geq 1$, also

$$1 + \frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq 1$$

Nun konvergieren $1 + \frac{a-1}{n}$ und die konstante Folge 1 gegen 1, sodass gemäß dem Einschließungskriterium auch $\sqrt[n]{a} \to 1$ gelten muss.

Frage: Gilt auch für $0 < a < 1$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$?

Setze $b_n := \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ (siehe oben; $\frac{1}{a} > 1$).

Dann ist $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Dazu zuerst: $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$ für $x \geq 0$.

für $n = 1$: $(1+x)^1 \geq \frac{1\cdot 0}{2} x^2 = 0$

für $n \geq 2$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k} = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

$$\geq \binom{n}{2}x^2 = \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

Also gilt in der Tat $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$

$$1 + x \geq \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^2}_{\stackrel{!}{=} n}}$$

$\frac{n(n-1)}{2} x^2 = n \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{n-1}$. Wähle hier also $x = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Dann folgt

$$\underset{\downarrow n\to\infty \atop 1}{1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}} \geq \sqrt[n]{n} \geq \underset{\downarrow n\to\infty \atop 1}{1}$$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ (Einschließungskriterium).

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$

$p=1$: $0 \le \frac{n^1}{a^n} \le \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{(a-1)^2}$, denn: Setze in der Formel aus (2) $x = a-1$:

$(1+(a-1))^n \ge \frac{n(n-1)}{2} \cdot (a-1)^2 \Leftrightarrow a^n \ge \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$,

also $\frac{n}{a^n} \le \frac{2n}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{(a-1)^2} \le \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{(a-1)^2}$.

Da $\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{(a-1)^2} \to 0$ für $n\to\infty$, folgt $\frac{n}{a^n} \to 0$ für $n \to \infty$.

Für beliebiges $p$: $\frac{n^p}{a^n} = \left(\frac{n}{(a^{\frac{1}{p}})^n}\right)^p$

Nach dem gerade Bewiesenen konvergiert der Inhalt der Klammer gegen 0, also auch der gesamte Ausdruck.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a(n)}{n} = 0$ für $a > 1$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a^\varepsilon > 1$, also $a^\varepsilon - 1 > 0$.

Nach (2) ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Die Definition des Grenzwerts für $\varepsilon' = a^\varepsilon - 1$ besagt dann:

$$\exists n_0 \quad \forall n \ge n_0 \quad |\sqrt[n]{n} - 1| < a^\varepsilon - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < a^\varepsilon - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n < a^{n\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \log_a(n) < n\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a(n)}{n} < \varepsilon$$

Aus der Grenzwertdefinition folgt also $\frac{\log_a(n)}{n} \to 0$.

Aufgabe 2: a) $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

$1 \leq \sqrt[n]{2n+1} \leq \sqrt[n]{2n+n} = \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$

Einschließungskriterium $\Rightarrow \quad a_n \to 1$

b) $b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

$b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} \geq \sqrt[n]{3^n} = 3 \qquad b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \longrightarrow 1 \cdot 3 = 3$

$\Rightarrow \quad b_n \to 3$

c) $c_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}$

$c_n \geq \sqrt[n]{2^n + 0} = 2$

$c_n \leq \sqrt[n]{2^n + 2^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 2 \to 2$

$n^2 \leq 2^n$ für großes $n$, denn nach Aufgabe 1 (3) gilt $\frac{n^2}{2^n} \to 0$, d.h. $\frac{n^2}{2^n} < 1$

$\Leftrightarrow n^2 < 2^n$ für $n$ groß

$c_n \to 2$

d) $d_n = \dfrac{2^{2n+1} + n^5}{3^n + 4^n} = \dfrac{2 \cdot 4^n + n^5}{3^n + 4^n} = \dfrac{2 + \frac{n^5}{4^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} \cdot \dfrac{4^n}{4^n} \longrightarrow \dfrac{2+0}{0+1} = 2.$

e) $e_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$

$0 \leq e_n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot 2^n \cdot n! \cdot 2^n} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}$

$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n}}$

$\leq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow 0$

f) $f_n = \dfrac{\log_2(2n)}{\log_2(n)}$

$\log_2(2n) > \log_2(n) \Rightarrow 1 \leq f_n = \dfrac{\log_2(2) + \log_2(n)}{\log_2(n)} = \dfrac{1}{\log_2(n)} + 1 \longrightarrow 0 + 1 = 1$

g) $g_n = \dfrac{\log_2(n+1)}{\log_2(n)}$

$\lim_{n \to \infty} g_n = 1$

1. $g_n = \dfrac{\log_2(n+1)}{\log_2(n)} > \dfrac{\log_2(n)}{\log_2(n)} = 1$

2. $g_n = \dfrac{\log_2(n+1)}{\log_2(n)} \leq \dfrac{\log_2(2n)}{\log_2(n)} \longrightarrow 1$ (wegen f)

h) $h_n = \frac{n!}{n^n}$

$0 \le h_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \le \frac{1 \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n} \to 0 \quad \Rightarrow h_n \to 0$

j) $j_n = \frac{n^{23}}{n!}$

$0 \le j_n = \frac{n^{23}}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \quad n \cdot \ldots \cdot n}{n\,(n-1)\,(n-2) \cdot \ldots\,(n-22)} \cdot \frac{1}{(n-23)!} \le \left(\frac{n}{n-22}\right)^{23} \cdot \frac{1}{(n-23)!} \quad (n \ge 23)$

$= \left(1 + \frac{22}{n-22}\right)^{23} \cdot \frac{1}{(n-23)!} \to 1^{23} \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow j_n \to 0$ für $n \to \infty$

k) $k_n = \frac{3n + (2 + (-1)^n) \log_2 n}{\sqrt{n^2+1}}$

$k_n \le \frac{3n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{3 \log_2 n}{\sqrt{n^2+1}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} + 3 \cdot \frac{\log_2 n}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = 3$

$k_n \ge \frac{3n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{\log_2 n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 3 + 0 = 3$

$\Rightarrow k_n \to 3$

l) $l_n = \sqrt[n^2]{n}$

$1 \le l_n = \sqrt[n^2]{n} \le \sqrt[n]{n} \to 1$

$\Rightarrow l_n \to 1.$

p) $p_n = \frac{n^5 \cdot 2^n}{3^{n+3}}$

$p_n = \frac{n^5 \cdot 2^n}{27 \cdot 3^n} = \frac{1}{27} \cdot \frac{n^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3^n}{3^n} = \frac{1}{27} \cdot \frac{n^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \longrightarrow 0$ (wg. Aufg. 1 (3))

q) $q_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + n\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$q_n = \frac{\left(n - \sqrt{n^2+n\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\cancel{n}+1 - \cancel{n}} = \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\left(n - \sqrt{n^2+n\sqrt{n}}\right)\left(n + \sqrt{n^2+n\sqrt{n}}\right)}{n + \sqrt{n^2+n\sqrt{n}}}$

$= \frac{\left(n^2 - n^2 - n\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{n + \sqrt{n^2 + \frac{n^2}{\sqrt{n}}}} = \frac{-n\sqrt{n^2+n} - n^2}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} = -n \cdot \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$

$\lim_{n\to\infty} q_n = -\infty$

r) $r_n = \sqrt{n\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)}$

$= \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}}{\sqrt{n + \sqrt{n^2-1}}} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n^2 - n^2 + 1}}{\sqrt{n + \sqrt{n^2-1}}}$

$= \sqrt{\frac{n}{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sqrt{\frac{n}{n + n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}$

5) $s_n = \sqrt[2n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n + n^{\frac{3}{2}}}$

$s_n \geq \sqrt[2n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$s_n \leq \sqrt[2n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \sqrt[2n]{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n+1}{2n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \to \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

für großes $n$, da nach Aufgabe 1 (3) $\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} < \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to 0$, also insbesondere $\frac{n^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} < \frac{1}{2}$ für großes $n$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Aufgabe 3: $a_n \to g > 0$

z.z: $b_n = \sqrt[n]{a_n} \to 1$

$a_n \to g$ bedeutet: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - g| < \varepsilon$

Ein derartiges $n_0$ gibt es zu jedem positiven $\varepsilon$, also auch zu z.B. $\varepsilon = \frac{g}{2}$.

$|a_n - g| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$

$\Leftrightarrow g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{g}{2} < a_n < \frac{3g}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{g}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3g}{2}}$

Nun konvergiert $\sqrt[n]{\text{feste Zahl}}$ (also $\sqrt[n]{\frac{g}{2}}$ und $\sqrt[n]{\frac{3g}{2}}$) gegen 1 (vgl. Aufgabe 1 (1)), daher konvergiert nach dem Einschließungskriterium auch $\sqrt[n]{a_n} = b_n$ gegen 1.

Aufgabe 4: $a_n \to g$, $-1 < g < 1$

zz: $b_n = a_n^n \to 0$

$a_n \to g$ : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - g| < \varepsilon$

$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

$$(g-\varepsilon)^n < a_n^n < (g+\varepsilon)^n$$

Das gilt für jedes $\varepsilon > 0$. Wähle nun also $\varepsilon$ so, dass $-1 < g - \varepsilon$ und $g + \varepsilon < 1$, also beispielsweise

$\varepsilon = \min\{g - \frac{-1+g}{2}, \frac{1+g}{2} - g\}$.

Dann ist $\frac{-1+g}{2} < g - \varepsilon$ und $g + \varepsilon < \frac{1+g}{2}$, also

$$\left(\frac{-1+g}{2}\right)^n < a_n^n < \left(\frac{1+g}{2}\right)^n.$$

Nun sind $\frac{-1+g}{2}$ und $\frac{1+g}{2}$ betraglich kleiner als 1, also konvergieren $\left(\frac{-1+g}{2}\right)^n$ und $\left(\frac{1+g}{2}\right)^n$ jeweils gegen 0; dem Einschließungskriterium zufolge konvergiert also auch $b_n = a_n^n$ gegen 0.

Aufgabe 5: a) $x_1 = \sqrt{2}$ $\quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ für $n \geq 1$

Angenommen, die Folge konvergiert mit Grenzwert $x_\infty$.
Dann ist auch $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty$, also $x_\infty = \sqrt{2 x_\infty}$

$$\Leftrightarrow x_\infty = 0 \lor x_\infty = 2.$$

Wenn die Folge also konvergiert, hat sie entweder den Grenzwert 0 oder den Grenzwert 2.

Die Folge ist beschränkt: $0 < x_n < 2$

$n = 1$: $x_n = \sqrt{2} < 2$

Es sei $x_n < 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist auch $x_{n+1} = \sqrt{2 x_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$

Sie ist monoton wachsend:

$$x_{n+1} = \sqrt{2 x_n} > \sqrt{x_n \cdot x_n} = x_n.$$

Da die Folge beschränkt ist und monoton wächst, konvergiert sie und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

($\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ kann nicht sein, da die Folge wächst und $x_1 = \sqrt{2} > 0$.)

b) $x_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad x_{n+1} = x_n - x_n^2$

Die Folge fällt monoton: $\quad x_{n+1} = x_n - x_n^2 \leq x_n$

und ist beschränkt: $\quad 0 < x_n < 1$

$0 < x_1 = \frac{1}{2} < 1$

Es gelte $0 < x_n < 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt auch $x_{n+1} = x_n - x_n^2 < 1 - 0^2 = 1$

$x_{n+1} = x_n - x_n^2 = x_n(1 - x_n) > 0 \cdot (1-1) = 0$

Demnach konvergiert $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, besitzt also einen Grenzwert $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$, für den gilt: $x_\infty = x_\infty - x_\infty^2 \Leftrightarrow x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) $x_1 = 1$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2+x_n}$

Wenn $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert, so gilt

$$x_\infty = \frac{1+x_\infty}{2+x_\infty} \Leftrightarrow x_\infty^2 + 2x_\infty = 1 + x_\infty \Leftrightarrow x_\infty^2 + x_\infty - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_\infty = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x_\infty = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

- $x_n > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis per Induktion: $x_1 = 1 = \frac{-1+3}{2} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Sei $x_n > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $x_{n+1} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x_n}{2+x_n} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + x_n > -1 + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} x_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-(\sqrt{5}-1)}{2} x_n > \sqrt{5} - 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow x_n > (\sqrt{5}-2) \cdot \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{5}-4)\cdot(3+\sqrt{5})}{3^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

und $x_n > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ gilt nach Induktionsvoraussetzung.

- $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2+x_n} < x_n$

$$\Leftrightarrow 1 + x_n < 2x_n + x_n^2$$

$$\Leftrightarrow x_n^2 - x_n - 1 > 0$$

$$\Leftarrow x_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$x_n$ ist also nach unten beschränkt durch $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und fällt monoton.

Also konvergiert die Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

d) $x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1+2x_n}{1+x_n} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$

$x_n \geq 1$, denn $x_1 = 1$ und $x_n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} > 1 + 0 = 1$.

$x_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$x_1 = \frac{1+1}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

IV: Es sei $x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

$1 + \frac{x_n}{x_n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x_n}{1+x_n} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x_n < \frac{\sqrt{5}-1}{2} x_n + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} x_n < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x_n < \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$

$\Leftrightarrow x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$ IV.

$x_{n+1} > x_n$

$\Leftrightarrow \frac{1+2x_n}{1+x_n} > x_n \Leftrightarrow 2x_n + 1 > x_n + x_n^2 \Leftrightarrow x_n^2 - x_n - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

bereits gezeigt: $1 \leq x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Also wächst die Folge monoton und ist beschränkt.
Sie konvergiert also und für den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt

$a = \frac{1+2a}{1+a}$

$\Leftrightarrow a + a^2 = 1 + 2a$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

also, da $x_n > 0$,

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 6: Wir verwenden für diese Aufgabe folgenden

Satz: Sei $A$ eine Menge, $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

Die Zahl $s$ ist das $\overset{\text{Infimum}}{\text{Supremum}}$ von $A$ genau dann,
wenn 1.) $s$ eine $\overset{\text{untere}}{\text{obere}}$ Schranke von $A$ ist: $\forall a \in A: a \overset{\geq}{\leq} s$
und 2.) es eine Folge $a_n \in A$ gibt mit $a_n \to s$.

$$A = \left\{ \frac{xy^2}{x^2+y^4} : x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x^2+y^4 \neq 0 \right\}$$

$\sup A = \frac{1}{2}$, denn $\frac{1}{2}$ ist obere Schranke von $A$:

$$0 \leq (x-y^2)^2 = x^2 - 2xy^2 + y^4$$

$$\Leftrightarrow 2xy^2 \leq x^2+y^4 \Leftrightarrow \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{2}$$

und mit $x=1, y=1$ erkennt man $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{1^2+1^4} = \frac{xy}{x^2+y^4} \in A$.

$\inf A = -\frac{1}{2}$, denn $-\frac{1}{2} \in A$ $(x=-1, y=1)$ und $-\frac{1}{2}$ ist untere Schranke von $A$:

$$0 \leq (x+y^2)^2 = x^2+2xy^2+y^4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^4 \geq -2xy^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \geq -2 \cdot \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$B = \left\{ \frac{1+(-1)^{m+n}}{m^3+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\frac{1+(-1)^{m+n}}{m^3+n} = 0$ für $m+n$ ungerade, also $0 \in B$,

und da $1+(-1)^{m+n} \geq 0$ und $m^3+n > 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1+(-1)^{m+n}}{m^3+n} \geq 0$

und es folgt $\inf B = 0$.

$\frac{1+(-1)^{m+n}}{m^3+n} \leq \frac{2}{m^3+n} \leq \frac{2}{1+1} = 1$, $\frac{1+(-1)^{1+1}}{1^3+1} = \frac{2}{2} = 1 \in B$,

demnach $\sup B = 1$.

$$C = \left\{ \frac{mn}{m^2+n^2} : m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$$

$\inf C = 0$. $\frac{mn}{m^2+n^2} > 0 \ \forall m, n \in \mathbb{N}$. Für $m=1$, $n>1$ ist $a_n = \frac{n}{n^2+1} \in C$

und $a_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1/n}{1+1/n^2} \to \frac{0}{1+0} = 0$ für $n \to \infty$. Obiger Satz liefert damit $\inf C = 0$.

$\sup C = \frac{1}{2}$. $\frac{mn}{m^2+n^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2mn \leq m^2+n^2 \Leftrightarrow 0 \leq (m-n)^2$.

$m$, $m+1 = n$

$$\frac{m(m+1)}{m^2+(m+1)^2} = \frac{m^2+m}{2m^2+2m+1} = \frac{1+1/m}{2+\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

$D = \left\{ \frac{m^3 + (-2)^n}{m^3 + 3^n} ; m, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup D = 1$, denn

- 1 ist obere Schranke: $\frac{m^3 + (-2)^n}{m^3 + 3^n} \le \frac{m^3 + 2^n}{m^3 + 3^n} < 1$, da $m^3 + 2^n < m^3 + 3^n$
- es gibt eine Folge von Elementen aus $D$, die gegen 1 konvergiert:

$n = 2,\ m \to \infty$: $\frac{m^3 + (-2)^n}{m^3 + 3^n} = \frac{m^3 + 4}{m^3 + 9} = \frac{1 + \frac{4}{m^3}}{1 + \frac{9}{m^3}} \to 1.$

$\inf D = -\frac{1}{4}$, denn

- $-\frac{1}{4} = \frac{1^3 + (-2)^1}{1^3 + 3^1} = \frac{m^3 + (-2)^n}{m^3 + 3^n} \in D$ (mit $m = 1, n = 1$).
- $-\frac{1}{4}$ ist untere Schranke:

Für $m = 1$, $n = 1, 2, 3$ ergeben sich $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$, die $\ge -\frac{1}{4}$ sind.

Für alle anderen $m, n \in \mathbb{N}$: $\frac{m^3 + (-2)^n}{m^3 + 3^n} \ge \frac{m^3 - 2^n}{m^3 + 3^n}$

$\frac{m^3 - 2^n}{m^3 + 3^n} \ge -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^3 - 2^n \ge -\frac{1}{4} m^3 - \frac{1}{4} \cdot 3^n \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 3^n \ge 2^n - \frac{5}{4} m^3$

Es genügt also zu zeigen: für $n \ge 3$ ist $\frac{1}{4} \cdot 3^n \ge 2^n - \frac{5}{4}$.

Induktion: $n = 3$: $\frac{1}{4} \cdot 3^3 = \frac{27}{4} \ge \frac{27}{4} = \frac{32}{4} - \frac{5}{4} = 2^3 - \frac{5}{4}$

Es gelte $\frac{1}{4} \cdot 3^n \ge 2^n - \frac{5}{4}$.

Dann ist auch $\frac{1}{4} \cdot 3^{n+1} = \frac{1}{4} \cdot 3^n \cdot 3 \ge (2^n - \frac{5}{4}) \cdot 3 = 2 \cdot 2^n + 2^n - \frac{15}{4}$

$\ge 2^{n+1} + 2^3 - \frac{15}{4} > 2^{n+1} - \frac{5}{4}$.

$E = \left\{ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c > 0 \right\}$

$\inf E = 1$, denn $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$

und mit $a = 1$, $b = n$, $c = n^2$ strebt für $n \to \infty$ die Folge

$\frac{1}{1+n} + \frac{n}{n+n^2} + \frac{n^2}{n^2+1}$ gegen 1.

$\sup E = 2$, denn $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = 1 - \frac{b}{a+b} + 1 - \frac{c}{b+c} + 1 - \frac{a}{c+a}$

$= 3 - \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) < 3 - \left( \frac{b + c + a}{a+b+c} \right) = 2$

und mit $b = 1$, $c = n^2$, $a = n$ konvergiert

$3 - \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) = 3 - \left( \frac{1}{1+n} + \frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n}{n^2+n} \right)$ gegen $3 - 1 = 2$.