Analysis I, Globalübung 4

Aufgabe 1: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

„Trick": Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+2-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1-1} + \underbrace{\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2(N+1)-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 0 - \frac{1}{2N+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Demnach ist $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^2}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(N+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{(N+1)^2}$$

und demnach $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim\limits_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{(N+1)^2}\right) = 1.$

Aufgabe 2: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver Zahlen

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$ existiert und $g \neq 0$, also, da a_n und b_n positiv sind: $g > 0$.

Die Folge $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen g. Das bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - g\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - g < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad g - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < g + \varepsilon$$

Da es zu jeder positiven Zahl ε ein solches n_0 gibt, gibt es das auch für $\varepsilon = \frac{g}{2}$, denn auch $\frac{g}{2}$ ist positiv:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \geq n_0}} : \quad g - \frac{g}{2} < \frac{a_n}{b_n} < g + \frac{g}{2}$$

$$\frac{g}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} g \quad (*).$$

$\Rightarrow$| Es sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Zu zeigen ist, dass dann auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\frac{g}{2} < \frac{a_n}{b_n} \Leftrightarrow b_n < \frac{2a_n}{g} \qquad (\text{vgl. } (*)).$$

Dann ist (für $N > n_0$)

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{n_0} b_n + \sum_{n=n_0+1}^{N} b_n < \sum_{n=1}^{n_0} b_n + \sum_{n=n_0+1}^{N} \frac{2}{g} \cdot a_n$$

$$\leq \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} b_n}_{\substack{=\text{feste Zahl,}\\ \text{da nur}\\ \text{endlich viele Summanden}}} + \underbrace{\frac{2}{g}\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\substack{=\text{feste Zahl,}\\ \text{da konvergent}}},$$

also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ beschränkt und somit (weil alle b_n positiv sind) konvergent.

$\Leftarrow$| Es sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Es gibt n_0, sodass für $n \geq n_0$ $a_n < \frac{3}{2} g \cdot b_n$ (wegen $(*)$).

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{N} a_n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} a_n}_{\substack{=\text{feste}\\ \text{Zahl}}} + \underbrace{\frac{3}{2} g \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{=\text{feste Zahl}},$$

also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Insgesamt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. $\blacksquare$

Aufgabe 3: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5}{n^3+6n^2+8n+47}$

$\frac{n^2-5}{n^3+6n^2+8n+47}$ „sieht für große n ungefähr so aus wie $\frac{1}{n}$".

Zusammen mit Aufgabe 2 liefert das ein Kriterium für die Konvergenz:

Wähle $a_n = \frac{n^2-5}{n^3+6n^2+8n+47}$ und $b_n = \frac{1}{n}$.

Dann sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver Zahlen (zumindest ab $n=3$) und

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5n}{n^3+6n^2+8n+47} = 1$ existiert und ist ungleich 0.

Demnach konvergiert

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5}{n^3+6n^2+8n+47}$ genau dann, wenn

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert.

Nun ist aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Folglich divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5}{n^3+6n^2+8n+47}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

Auch hier folgt mit Aufgabe 2 und der Wahl $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$, $b_n = \frac{1}{n}$, dass die Reihe divergiert, denn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind Folgen positiver Glieder,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 1 \neq 0$

existiert und $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

Alternativ kann man auch direkt abschätzen:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow{N\to\infty} \infty,$$

also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

Wähle $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+4)}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. $a_n > 0$, $b_n > 0$.

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+4)} = 1 \neq 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ konvergiert, denn auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert (vgl. Übung 7, A. 3 b).

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}$

Die vielen immer gleichen Faktoren in den Summanden lassen die Anwendung des Quotientenkriteriums sinnvoll erscheinen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}\cdot (n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{1\cdot 3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{2n+1}{3(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} < 1,$$

also konvergiert die Reihe.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}$

Weil hier ein n im Exponenten steht, ist zu erwarten, dass der Ausdruck bei Anwendung des Wurzelkriteriums vereinfacht wird:

$$\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1, \text{ also konvergiert } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}.$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n(n+1)}}$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n^2+n}} < \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n^2}} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)(n-1+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

Die Reihe konvergiert also.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \longrightarrow 0 < 1,$$

gemäß dem Quotientenkriterium konvergiert also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

Es ist $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} = \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$ eine gegen 2 konvergente Folge, d.h. keine Nullfolge. Also kann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ nicht konvergieren.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt{n!}}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{1000^n} = \frac{1000}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 0 < 1.$$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$ konvergiert mit der geometrischen Reihe als Majorante:

$2^{2^n} = 4^{\frac{2^n}{2}} = 4^{2^{n-1}} \geq 4^n$, denn $2^{n-1} \geq n$ (Induktion).

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{3^n}{2^{2^n}} < \sum_{n=1}^{N} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Aufgabe 4: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium:

$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist alternierende Folge, denn wegen des „$(-1)^{n+1}$" wechselt das Vorzeichen.

$\left\{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right|\right\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallende Nullfolge.

$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)-1} \Leftrightarrow 2n+1 > 2n-1 \Leftrightarrow 1 > -1$ ✓ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$.

Sie konvergiert aber nicht absolut, denn

$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{3n}$, d.h. $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$ ist absolut konvergent, denn

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2 3^n} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ und die geometrische Reihe konvergiert.

Damit ist sie auch konvergent, wie alle absolut konvergenten Reihen. (Deshalb lohnt es sich auch oft, zuerst die absolute Konvergenz einer Reihe zu überprüfen.)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ ist absolut konvergent (und damit erst recht konvergent),

denn für $n \geq 2$ ist $\frac{1}{(2n-1)^3} \leq \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)}$

$n^3 > n^2+n \Leftrightarrow n^2-n-1>0$

und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n + 1}{n}$ konvergiert nicht (also auch nicht absolut),

denn $\frac{(-1)^{n+1} n + 1}{n} = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n}$ ist keine Nullfolge.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{5^n}}{3^{2^n}}$ konvergiert nicht (und konvergiert nicht absolut),

denn $\frac{(-1)^n 2^{5^n}}{3^{2^n}}$ ist keine Nullfolge, da $\frac{2^{5^n}}{3^{2^n}} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis der Behauptung $2^{5^n} > 3^{2^n}$ per vollständiger Induktion:

IA: $n=1$: $2^{5^1} = 32 > 9 = 3^{2^1}$

IV: Es gelte $2^{5^n} > 3^{2^n}$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt auch $2^{5^{n+1}} > 3^{2^{n+1}}$:

$$2^{5^{n+1}} = 2^{5^n \cdot 5} = \left(2^{5^n}\right)^5 \overset{IV}{>} \left(3^{2^n}\right)^5 = 3^{5 \cdot 2^n} > 3^{2 \cdot 2^n} = 3^{2^{n+1}} \quad \square$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-50)(-1)^n}{n^2}$ konvergiert nicht absolut.

Wähle $a_n = \frac{n-50}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Dann sind beide Folgen fast immer (ab $n=51$) positiv und

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 50n}{n^2} = 1 \neq 0$ existiert.

Also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(n-50)(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, was der Fall ist.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-50)(-1)^n}{n^2}$ ist aber konvergent, denn (endlich viele Summanden haben keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten und für $n>99$):

$\left|\frac{(n-50)(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{n-50}{n^2}$ ist monoton fallend:

$$\frac{n-50}{n^2} > \frac{(n+1)-50}{(n+1)^2} \iff (n-50)(n+1)^2 > n^2(n-49)$$

$$\iff (n-50)(n^2+2n+1) > n^3 - 49n^2$$

$$\iff \cancel{n^3} + 2n^2 + n - 50n^2 - 100n - 50 > \cancel{n^3} - 49n^2$$

$$\iff n^2 - 99n > 50$$

$$\iff n(n-99) > 50 \quad \text{gilt für } n > 99$$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$ konvergiert absolut (ist also konvergent) nach dem Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-15)}{n^2}$

konvergiert nicht absolut, denn (für $n \geq 8$) ist

$$\left|\frac{(-1)^n(2n-15)}{n^2}\right| = \frac{2n-15}{n^2}.$$

Setze

$$a_n = \frac{2n-15}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$ Beide Folgen bestehen fast immer aus positiven Gliedern.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-15n}{n^2} = 2 \neq 0$$ existiert.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert, also divergiert (nach Aufgabe 2) auch $\sum a_n = \sum \left|\frac{(-1)^n(2n-15)}{n^2}\right|$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-15)}{n^2}$ konvergiert allerdings nach Leibniz:

Die Folge $\frac{(-1)^n(2n-15)}{n^2}$ alterniert ($(-1)^n$)

und ist betraglich monoton fallend für $n > 15$:

$$\frac{2n-15}{n^2} > \frac{2(n+1)-15}{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (2n-15)(n^2+2n+1) > (2n-13)n^2$$

$$\Leftrightarrow 2n^3-11n^2-28n-15 > 2n^3-13n^2$$

$$\Leftrightarrow n^2-14n-\frac{15}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-14) > \frac{15}{2}.$$