Analysis I, Globalübung 5

Aufgabe 1: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Da aus gleichmäßiger Stetigkeit sofort Stetigkeit folgt, versuchen wir zunächst gleichmäßige Stetigkeit nachzuweisen, das heißt: zu vorgegebenem ε ein nur von ε abhängiges $\delta > 0$ zu finden, sodass für alle x, y mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$|f(x)-f(y)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{1+y^2-1-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = \frac{|y^2-x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\leq |x-y| \cdot \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq |x-y| \cdot \underbrace{\frac{|x|+|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}}_{\leq \text{ Konstante } c}$$

(Nachweis später, für den Augenblick nehmen wir das einfach mal an)

$$\leq c \cdot |x-y| \leq c \cdot \delta = \varepsilon$$

für $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$

Dieses δ hängt nur von ε, nicht von x oder y ab und damit ist gleichmäßige Stetigkeit, also auch Stetigkeit, gezeigt.

Nun zu der noch vorhandenen Lücke im Beweis:

$$\frac{|x|+|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{|x|}{1+x^2} + \frac{|y|}{1+y^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 =: c.$$

$$2|x| \leq 1 + x^2$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2|x| + x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (1-|x|)^2 \geq 0.$$

Aufgabe 2: $f: \begin{cases} [1,\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ ist gleichmäßig stetig auf $[1,\infty)$.

Sei $\varepsilon > 0$.
Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
Dann gilt für alle $x, y \in [1,\infty)$ mit $|x-y| < \delta$:

$$|f(x)-f(y)| = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| = \left| \frac{y^2-x^2}{x^2y^2} \right| = \frac{|y-x||y+x|}{x^2y^2} \leq |y-x| \cdot \frac{|y|+|x|}{x^2y^2}$$

$$= |x-y| \cdot \left(\frac{y}{x^2y^2} + \frac{x}{x^2y^2} \right) = |x-y| \left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2} \right)$$

$$\overset{x,y \geq 1}{\leq} |x-y| \cdot (1+1) = 2|x-y| < 2\delta = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Aufgabe 3: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $b \in \mathbb{R}$.

$M = \{x : f(x) < b\}$ ist offen.

$A \subset \mathbb{R}$ offen bedeutet: $\forall x_0 \in A \; \exists \delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$

Sei $x_0 \in M$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset M$

$\exists \delta > 0$ mit $\forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(y) < b$.

Wir wissen, dass f in x_0 stetig ist.

Wähle $\varepsilon = b - f(x_0) > 0$. Nach der Definition der Stetigkeit:

$\exists \delta > 0 \; \forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad f(x_0) - \varepsilon < f(y) < f(x_0) + \varepsilon$

$\Rightarrow \quad f(y) < f(x_0) + b - f(x_0) = b$.

$N = \{x : f(x) \leq b\}$ ist abgeschlossen.

Eine Möglichkeit, das zu zeigen, ist die Verwendung dieses Satzes:

Satz: (a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, A offen. Dann ist $\mathbb{R} \setminus A$ abgeschlossen.

(b) Sei $B \subseteq \mathbb{R}$, B abgeschlossen. Dann ist $\mathbb{R} \setminus B$ offen.

Betrachte die Funktion $g = -f$ (diese ist stetig, da f stetig ist), die reelle Zahl $b' = -b$ und die Menge

$M' = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > b\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) < b'\}$

Diese Menge ist offen (vgl. den ersten Teil der Aufgabe) und somit ist nach dem Satz $\mathbb{R} \setminus M' = N$ abgeschlossen.

Aufgabe 4: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv

$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$ für $x \neq y$.

f besitzt eine Umkehrfunktion.

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) > f(y), \text{ falls } x > y \\ f(x) < f(y), \text{ falls } x < y \end{array} \right\} \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend.}$$

f ist injektiv.

Wäre f nicht injektiv, gäbe es x_1, x_2 mit $x_1 > x_2$, sodass $f(x_1) = f(x_2)$.

Da f aber streng monoton wächst, ist $f(x_1) > f(x_2)$.

f ist surjektiv nach Voraussetzung, also insgesamt bijektiv; deshalb gibt es eine Umkehrfunktion.

f ist stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$.

Da f surjektiv, gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon$, $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$.

Wähle $\delta = \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|\}$.

Da f streng monoton wächst, gilt für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\begin{array}{ccccccc} f(x_1) \leq f(x_0 - \delta) & < & f(x) & < & f(x_0 + \delta) \leq f(x_2) \\ f(x_0) - \varepsilon & < & f(x) & < & f(x_0) + \varepsilon \end{array}$$

$\Leftrightarrow \quad |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

Also ist f stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$ – und damit auf ganz $\mathbb{R}$, denn x_0 war beliebig gewählt.

Zur Lösung der folgenden Aufgaben verwendet man den wichtigen

Zwischenwertsatz: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $y \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$

Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = y$.

Anders formuliert: f nimmt im Intervall (a,b) jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Aufgabe 5: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) \in \mathbb{Q} \ \forall x \in \mathbb{R}$

z.z.: $f = \text{const}$.

Angenommen, f wäre nicht konstant.

Dann gäbe es $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq f(y)$, $x < y$.

Da $f(y) \neq f(x)$, gäbe es eine irrationale Zahl $\varphi \in (\min\{f(x), f(y)\}, \max\{f(x), f(y)\})$.

Nach dem Zwischenwertsatz müsste es also $\xi \in (x,y)$ geben mit

$f(\xi) = \varphi \notin \mathbb{Q}$ $\lightning$.

Aufgabe 6: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $f(1000) = 999$, $f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. $f(500) = ?$

$y \cdot f(y) = 1$

$f(y) = \frac{1}{y} \ \forall y \in \text{Bild}(f)$.

$f(1000) = 999$ $f(999) = \frac{1}{999}$

Da f stetig, gibt es $x \in (999, 1000)$ mit $f(x) = 500$, denn $f(999) < 500 < f(1000)$.

(Zwischenwertsatz) Also ist $500 \in \text{Bild}(f)$ und damit $f(500) = \frac{1}{500}$.

Aufgabe 7: Es gibt keine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert genau zweimal annimmt.

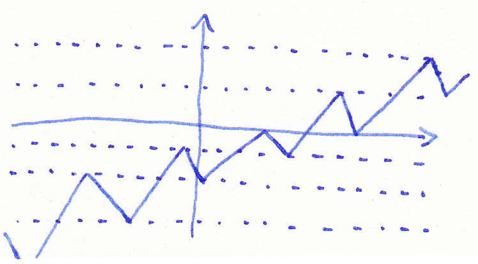
Angenommen, f hätte diese Eigenschaften. Dann gäbe es also x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 0$. In dem Intervall (x_1, x_2) ist also oBdA $f > 0$.

Das Intervall $[x_1, x_2]$ ist kompakt, f nimmt also in diesem Intervall ihr Maximum $f(\xi) > 0$ an einer Stelle $\xi \in (x_1, x_2)$ an.

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $\chi_1 \in (x_1, \xi)$, $\chi_2 \in (\xi, x_2)$ mit $f(\chi_1) = \frac{f(\xi)}{2} = f(\chi_2)$. Da f alle Werte, insbesondere $2f(\xi)$ annehmen soll, muss es $x_3 \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$ geben, sodass $f(x_3) = 2f(\xi)$.

Dann gibt es aber $\chi_3 \in (x_2, x_3)$ bzw. $\chi_3 \in (x_3, x_1)$ mit $f(\chi_3) = \frac{f(\xi)}{2} = f(\chi_1) = f(\chi_2)$ (ZWS). Damit nähme f aber den Wert $\frac{f(\xi)}{2}$ dreimal an. $\lightning$

Eine stetige Funktion, die jeden Wert dreimal annimmt, gibt es aber:



Aufgabe 8: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)=f(1)$, $n\in\mathbb{N}$.

z.z: $\exists\, x\in[0,1-\frac{1}{n}]$ mit $f(x)=f(x+\frac{1}{n})$

Definiere dazu $g:[0,1-\frac{1}{n}]\to\mathbb{R}$ durch $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$.

Dann ist g stetig, da g Differenz zweier stetiger Funktionen ist.
$[0,1-\frac{1}{n}]$ ist kompakt $\Rightarrow$ g nimmt in diesem Intervall Minimum g_{min} und Maximum g_{max} an.

- $g_{min}=g_{max}=0$. Dann ist $g(x)=0$ für alle $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$, also $f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0 \Leftrightarrow f(x)=f(x+\frac{1}{n})$.

- $g_{min}\neq 0\neq g_{max}$.

Behauptung: $g_{min}<0$.
Angenommen $g_{min}\geq 0$. Dann wäre stets $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(x+\frac{1}{n})$,
also $f(0)>f(\frac{1}{n})>f(\frac{2}{n})>\ldots>f(\frac{n-1}{n})>f(1)$, im Widerspruch zu $f(0)=f(1)$.
Analog folgt $g_{max}>0$.
Da g stetig ist, besagt der Zwischenwertsatz, dass g eine Nullstelle haben muss, es also ein $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$ mit $g(x)=0$
$\Leftrightarrow f(x)=f(x+\frac{1}{n})$ geben muss. $\blacksquare$

Aufgabe 9: Gesucht: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, stetig, $f(1)=1$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

$f(0)=0$.
$f(0)+f(1)=f(0+1)=1$
$\Rightarrow f(0)=1-f(1)=1-1=0$.

$f(n)=n$ für $n\in\mathbb{N}$
Induktion:
$f(1)=1$
Sei $f(n)=n$ für ein $n\in\mathbb{N}$.
Dann ist $f(n+1)=f(n)+f(1)=n+1$.

$f(z)=z$ für $z\in\mathbb{Z}$
Noch zu zeigen: $f(-n)=-n$ für $n\in\mathbb{N}$
$0=f(n+(-n))=f(n)+f(-n)=n+f(-n)$
$\Rightarrow \quad -n=f(-n)$.
Allgemeiner: $-f(x)=f(-x)$ (gleiche Rechnung) für $x\in\mathbb{R}$.

$n\cdot f(x)=\underbrace{f(x)+f(x)+\ldots+f(x)}_{n \text{ mal}}=f(x+x+\ldots+x)=f(nx)$ für $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$, denn $n\cdot f(\frac{1}{n})=f(n\cdot\frac{1}{n})=f(1)=1$

Damit folgt für $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+$: $f(\frac{p}{q})\overset{p\in\mathbb{N}}{=}p\cdot f(\frac{1}{q})\overset{q\in\mathbb{N}}{=}p\cdot\frac{1}{q}=\frac{p}{q}$
und wegen $f(-x)=-f(x)$: $f(q)=q\ \forall q\in\mathbb{Q}$.

Da f stetig ist, folgt $f=id_{\mathbb{R}}$, denn $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Noch zu zeigen ist das für $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
Sei $x\in\mathbb{R}$.
Es gibt eine Folge rationaler Zahlen, die gegen diese Zahl konvergiert. Sei $\{x_n\}$ eine solche Folge. Die Folge $\{f(x_n)\}$ ist identisch mit dieser Folge, da $x_n\in\mathbb{Q}$.
Da f stetig, ist $f(x)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.