Analysis I, Globalübung 6

Aufgabe 1:

$x=y$: Die Ungleichung stimmt ($0 \leq 0$).

$x \neq y$: $$|\log(2+3x^2) - \log(2+3y^2)| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{\log(2+3x^2)-\log(2+3y^2)}{x-y}\right| \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y$$

Betrachte die Funktion $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(t) = \log(2+3t^2) \end{cases}$

Damit wird die zu beweisende Ungleichung zu

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Eine Aussage über Ausdrücke dieser Form $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ trifft der

<u>Mittelwertsatz:</u> Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b). Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

Auf obige Funktion treffen die Voraussetzungen zu (sie ist stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$), damit gibt es im Intervall (x,y) (bzw. eigentlich: im Intervall $(\min\{x,y\}, \max\{x,y\})$) ein c mit $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Statt also $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ $(x \neq y)$ zu beweisen, genügt es, $|f'(c)| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ zu zeigen.

$$|f'(c)| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\left|\frac{1}{2+3c^2} \cdot 6c\right| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} \frac{6|c|}{2+3c^2} \leq 1$$

$$2\sqrt{6}\,|c| \leq 2+3c^2$$

$$0 \leq 3|c|^2 - 2\sqrt{6}\,|c| + 2$$

$$0 \leq |c|^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}|c| + \frac{(\sqrt{6})^2}{3^2}$$

$$0 \leq \left(|c| - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$$

$\boxtimes$

Aufgabe 2:

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x - \log 1}{x-1}$$

Definition der Ableitung

$$\stackrel{\downarrow}{=} \log'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$$

c) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^x - 4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^x - 2^2}{x-2} = \frac{d}{dx} x^x (2) = x^x(1+\log x)\Big|_{x=2} = 4 + 4\log 2$$

d) $$\lim_{x\to e} \frac{\log(\log(x))}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\log(\log(x)) - \log(\log(e))}{x-e} = \frac{d}{dx}\log(\log(x))\Big|_{x=e}$$

$$= \frac{1}{x\log x}\Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$$

e) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x\log x)}{2^x\log x - \log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x\log x)}{(2^x - 2^0)\cdot\log x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}}{2^x - 2^0} \cdot \frac{\log(1+x\log x)}{\cancel{x}\log x} \underset{\substack{y := x\log x \\ x\to 0^+ \Rightarrow y\to 0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{2^x-2^0} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}$$

$$= \frac{1}{\frac{d}{dx}2^x\Big|_{x=0}} \cdot 1 = \frac{1}{\log 2 \cdot 2^0} = \frac{1}{\log 2}.$$

f) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2x}-1}{\log x \cdot \log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2x}-1}{\cancel{x}\log x} \cdot \frac{\cancel{x}}{\log(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x\log x}-1}{x\log x} \cdot \frac{x}{\log(1+x)} \underset{\substack{y = x\log x \\ x\to 0^+ \Rightarrow y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^{2y}-1}{y} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log(1+x)}$$

$$\underset{\substack{z = 2y \\ y\to 0 \Rightarrow z\to 0}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z}\cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x^4}}$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x^4}} = e^{\frac{x^2+1}{x^4}\cdot\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} = e^{\frac{x^2+1}{x^4}\cdot\log\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right)}$$

Betrachte den Grenzwert des Exponenten:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^4}\cdot\log\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^4}\cdot\frac{-2}{x^2+1}\cdot\frac{\log\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right)}{\frac{-2}{x^2+1}}$$

$$\underset{\substack{y=-\frac{2}{x^2+1}\\ x\to\infty \Rightarrow y\to 0}}{=} \lim_{x\to\infty} -\frac{2}{x^4}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 0\cdot 1 = 0.$$

Damit ist dann

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x^4}} = e^0 = 1$$

h) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{2x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{x}{2x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\left(x\cdot\frac{x}{2x^2+1}\cdot\frac{\log\left(1+\frac{x}{2x^2+1}\right)}{\frac{x}{2x^2+1}}\right)} \underset{\substack{y=\frac{x}{2x^2+1}\\ x\to\infty\Rightarrow y\to 0.}}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+1}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\cdot 1} = e^{\frac{1}{2}}$$

i) $$\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^{10} \underset{\substack{y=-\log x\\ x=e^{-y}\\ x\to 0^+\Rightarrow y\to+\infty}}{=} \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cdot(-y)^{10} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^{10}}{e^y} = 0,$$

da (für $y>0$) $0 \le \frac{y^{10}}{e^y} \le \frac{y^{10}}{\frac{y^{11}}{11!}} = \frac{11!}{y} \xrightarrow{y\to\infty} 0$.

Aufgabe 3: f soll in $x_0 = 0$ differenzierbar und dazu insbesondere auch stetig werden.

f stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

a) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$

gesucht: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =: f(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} \underset{y=x^2}{=} \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1 \text{, also } f(0)=1.$$

Für Differenzierbarkeit gesucht: $f'(0)$, also der Koeffizient des Terms in $f(0+h)$, der linear in h ist:

$$f(0+h) = \frac{e^{h^2}-1}{h^2} = \frac{1+h^2+\frac{h^4}{2}+\frac{h^6}{6}+\frac{h^8}{24}+\ldots-1}{h^2} = 1+\underbrace{\tfrac{1}{2}h^2+\tfrac{1}{6}h^4+\ldots}$$
$$= f(0)+0\cdot h + r(h)$$

Der Koeffizient vor h in dieser Darstellung ist 0, also ist $f'(0)=0$.
Achtung: Das gilt nur, wenn der „Rest" $r(h)$ schnell genug klein wird, soll heißen: $\frac{r(h)}{|h|} \to 0$ für $h\to 0$.
Das ist nicht selbstverständlich, immerhin handelt es sich hier um unendlich viele Summanden.

$$0 \le \frac{r(h)}{|h|} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{|h|}+\frac{1}{6}\frac{h^4}{|h|}+\frac{1}{24}\cdot\frac{h^6}{|h|}+\ldots \le \frac{1}{2}|h|+\frac{1}{6}|h|^3+\frac{1}{24}|h|^5+\ldots$$
$$= |h|\cdot\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}|h|^2+\tfrac{1}{24}|h|^4+\ldots\right) \le |h|\cdot\left(1+|h|+\tfrac{1}{2}|h|^2+\ldots\right) = |h|e^{|h|}$$
$$\to 0 \text{ für } h\to 0.$$

b) $f(x) = \dfrac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2}$

$$f(x) = \frac{1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^4}{4!}+\ldots-3\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)+2}{x^2}$$
$$= \frac{\overset{=0}{(1-3+2)}+\overset{=0}{(3x-3x)}+\frac{9x^2}{2}-\frac{3x^2}{2}+\frac{27x^3}{3!}-\frac{3x^3}{3!}+\frac{81x^4}{4!}-\frac{3x^4}{4!}+\ldots}{x^2}$$
$$= \frac{6}{2}+\frac{24}{3!}x+\underbrace{\frac{3^4-3}{4!}\cdot x^2+\frac{3^5-3}{5!}x^3+\ldots}_{=:\, r(x)}$$

Da $$\frac{|r(x)|}{|x|} \le \frac{3^4-3}{4!}\cdot|x|+\frac{3^5-3}{5!}|x|^2+\ldots \le \frac{3^4}{4!}|x|+\frac{3^5}{5!}|x|^2+\ldots \le 3^4\cdot|x|\cdot\left(1+|3x|+\frac{|3x|^2}{2}+\ldots\right)$$
$$= 3^4\cdot|x|\cdot e^{|3x|} \to 0 \text{ für } x\to 0,$$

erkennt man an dieser Form sehr leicht:

$f(0) = \frac{6}{2} = 3$

$f'(0) = \frac{24}{3!} = 4.$

c) $f(x) = |x|^x$

Damit f in 0 stetig ist, muss $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} |x|^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\log|x|} = e^0 = 1$ sein.

f wird dennoch nicht in 0 differenzierbar, denn dazu müsste $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ existieren; es ist aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log|x|}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \log|x| \cdot \underbrace{\frac{e^{x\log|x|}-1}{x\log|x|}}_{\substack{\to 1, \\ \text{da } x\log|x|\to 0}} = -\infty .$$

Aufgabe 4: Wo ist f differenzierbar?

a) $f(x) = \sqrt{|\log x|}$

Da $\log$ und $\sqrt{\ }$ in ihrem ganzen Definitionsbereich diff'bar sind und der Betrag zumindest überall, wo sein Argument $\neq 0$ ist, ist f offensichtlich auf $(0,\infty)\setminus\{1\}$ diff'bar.

Wie ist es nun in der Stelle $x_0 = 1$?

Dazu muss $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{|\log x|}-0}{x-1}$ existieren. Aber bereits

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{|\log x|}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{\log x}} \cdot \underbrace{\frac{\log x - \log(1)}{x-1}}_{\to 1} = +\infty$$

existiert nicht.

Also ist f in 1 nicht diff'bar.

b) $f(x) = e^{-|x|}$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$: klar.

In 0: Gibt es $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-|x|}-e^{-|0|}}{x-0}$?

Dazu: Untersuchung des linksseitigen und des rechtsseitigen Grenzwerts:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{e^{-x}-1}{-x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-(-x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

Antwort: Nein, denn links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein.
f ist in 0 nicht diffbar.

c) $f(x) = \log_2 |\log_5 x|$

Für $x \in (0,1)$ ist $f(x) = (\log_2 \circ (-\log_5))(x)$, also diff'bar.

Für $x \in (1,\infty)$ ist $f(x) = (\log_2 \circ \log_5)(x)$, also diff'bar.

Für andere x ist f nicht definiert.

d) $f(x) = (e^{|x|} - 1)\sqrt{|x|}$

Für $x \neq 0$ ist f diff'bar.

$x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{|x|}-1}{x}\sqrt{|x|}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x}\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 1\cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}-1}{x}\sqrt{-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}-1}{-x}\sqrt{-x}\,(-1) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}-1}{-x} \cdot \lim\limits_{x\to 0^-} -\sqrt{-x} = 1\cdot 0 = 0$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{|x|}-1}{x}\sqrt{|x|}$ und folglich ist f diffbar in 0 mit $f'(0) = 0$.

Aufgabe 5: Gesucht: Alle diff'baren Fkten $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

a) $f'(x) = x^5$

Vorgehen: Wir „raten" zunächst eine (möglichst allgemeine) Funktion, die die Gleichung erfüllt und zeigen dann, dass jede derartige Funktion so aussieht.

$f(x) = \frac{x^6}{6} + c$ erfüllt sicherlich $f'(x) = x^5$.

Wir wollen noch zeigen, dass $f(x) = \frac{x^6}{6} + c$ unbedingt gelten muss, also, in anderen Worten, dass $g(x) := f(x) - \frac{x^6}{6}$ konstant ist,

d.h. $g'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{x^6}{6}\right)' \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow f'(x) - x^5 \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow x^5 - x^5 = 0$ ✓.

b) $f'(x) = e^x f(x)$

$f(x) = c\cdot e^{e^x}$ bzw. $g(x) := \frac{f(x)}{e^{e^x}} = \text{const}$

$$g'(x) = f'(x)\cdot e^{-e^x} + f(x)\cdot\left(e^{-e^x}\right)'$$
$$= e^x f(x)\cdot e^{-e^x} + f(x)\cdot(-e^x)\cdot e^{-e^x}$$
$$= 0$$

□

Aufgabe 6 : a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\log 2}{n}}-1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\log 2}{n}}-1}{\frac{\log 2}{n}} \cdot \log 2$$

$$\overset{\substack{x=\frac{\log 2}{n} \\ n\to\infty \Rightarrow x\to 0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \log 2 = 1 \cdot \log 2 = \log 2 .$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n}-1)\,n}{\log_2 n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n}-1)\,n}{\log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log_2(n)}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \frac{\log n}{\log_2 n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \frac{\log n}{\frac{\log n}{\log 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \log 2$$

$$\overset{\substack{x=\frac{\log n}{n} \\ x\to 0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \log 2 = \log 2 .$$