Analysis I, Globalübung 7

Aufgabe 1: $(x_n), (y_n)$ Folgen, $y_n \to +\infty$, $y_{n+1} > y_n$ für $n \geq n_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = g$

zz.: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = g$.

$g=0$: Wie einfaches Nachrechnen zeigt, ist $\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}} \cdot \Big(1 - \underbrace{\frac{y_{n_0}}{y_n}}_{\to 0}\Big) + \underbrace{\frac{x_{n_0}}{y_n}}_{\to 0}$.

Zu zeigen ist also $\frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}} \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Da $\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k} \to 0$, gibt es ein $n_1 \geq n_0$, sodass für $k \geq n_1$ $\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist.

x_n lässt sich auch schreiben als $x_n = x_{n_1} + (x_{n_1+1} - x_{n_1}) + (x_{n_1+2} - x_{n_1+1}) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$ und damit ist

$$\left|\frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| = \left|\frac{x_n - x_{n_1} + x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| \leq \left|\frac{x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| + \left|\frac{\sum_{k=n_1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)}{y_n - y_{n_0}}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| + \left|\frac{\sum_{k=n_1}^{n-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k} \cdot (y_{k+1} - y_k)}{y_n - y_{n_0}}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| + \frac{\sum_{k=n_1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} \cdot (y_{k+1} - y_k)}{y_n - y_{n_0}} \leq \left|\frac{x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\sum_{k=n_0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)}{y_n - y_{n_0}}$$

$$= \left|\frac{x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1$$

Der erste Summand hat hier die Form $\frac{\text{feste Zahl}}{\text{unbeschränkt monoton wachsende Folge}}$, konvergiert also gegen 0, d.h. es gibt $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq n_2$:

$\left|\frac{x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, also insgesamt für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$:

$\left|\frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| \leq \left|\frac{x_{n_1} - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ und daher $\left|\frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}}\right| \to 0$,

also auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

$g \neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = g \iff \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - g\right) = 0$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - g\,y_{n+1} - (x_n - g\,y_n)}{y_{n+1} - y_n} = 0$$

Betrachte die Folge $z_n = x_n - g\,y_n$.

Dann nimmt dieser Ausdruck die Form $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_{n+1} - z_n}{y_{n+1} - y_n} = 0$ an.

Mit dem ersten Teil der Aufgabe folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = 0$ und so

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} - \frac{g\,y_n}{y_n} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = g$.

Aufgabe 2: a) $a_n \to g$. $\quad b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

z.z: $b_n \to g$.

Verwende Aufgabe 1 mit

$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$y_n = n$

$y_n \to \infty$ und $y_{n+1} > y_n$, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)-n} = \frac{a_{n+1}}{1} \to g$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to g.$$

b) b_n konvergiert $\overset{?}{\Rightarrow}$ a_n konvergiert?

Nein.

Betrachte $a_n = (-1)^n$. Dann konvergiert a_n nicht.

$$b_n = \frac{-1+1-1+\ldots+(-1)^n}{n} = \begin{cases} -1 \cdot \frac{1}{n}, & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$|b_n| \le |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \to 0$, also $b_n \to 0$, d.h. b_n konvergiert.

c) $a_n > 0$, $g > 0$, $a_n \to g$.

z.z: $c_n := (a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \to g$.

Damit wir dieses Produkt als Summe behandeln und Aufgabe 2a) anwenden können, definieren wir eine Hilfsfolge

$x_n = \log a_n \quad \Rightarrow x_n \to \log g$

$$\overset{2a)}{\Rightarrow} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \to \log g$$

$$\frac{1}{n}(\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n) = \log (a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \to \log g$$

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\log (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}} \to e^{\log g} = g.$$

Aufgabe 3: (x_n) Folge, $x_n > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = g$

z.z: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = g$

Definiere eine Folge (a_n) durch $a_1 = x_1$, $a_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$ für $n > 1$, sodass also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ gilt.

Dann ist
$$\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}}$$
$$= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$

und nach Aufgabe 2c) damit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Aufgabe 4: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{n^p}$

$$\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{n^p} = \frac{(n+1)(n+1)^p}{n^p} - n = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^p - n$$

$$= n\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p - 1\right) + \underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p}_{\to 1^p = 1.}$$

Das Grenzwertverhalten des zweiten Summanden ist also kein Problem.
Wie aber sieht das beim ersten aus?

$$n\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p - 1\right) = \frac{e^{p\log(1+\frac{1}{n})}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{p\log(1+\frac{1}{n})}-1}{p\log(1+\frac{1}{n})}\cdot p \cdot \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \quad 1 \quad \cdot p \cdot 1$$

$$\left(\frac{e^x-1}{x} \to 1, \quad \frac{\log(1+x)}{x} \to 1, \quad \text{für } x \to 0\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{n^p} = p+1$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$

$n^{p+1} \to \infty$ und $(n+1)^{p+1} > n^{p+1}$. Damit ist nach Aufgabe 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p+(n+1)^p-(1^p+2^p+\ldots+n^p)}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} \cdot \frac{(n+1)^p}{n^p}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{n^p}} \cdot \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^p \overset{a)}{=} \frac{1}{p+1} \cdot 1 = \frac{1}{p+1}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log n} \overset{\text{Aufg. 1}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log(n)-\log(n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n-1}}{\log\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

$$x_n := \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{\substack{\text{vgl. Übung 11}\\ \text{Aufgabe 3}}} \frac{1}{e}$$

$$\overset{\text{Aufgabe 3}}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{x_n} \to \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Aufgabe 5: $$e^x \leq \frac{n!}{n!-x^n}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right), \quad n\in\mathbb{N},\ 0<x<\sqrt[n]{n!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!-x^n}{n!}e^x \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{x^n}{n!}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+n}}{k!\cdot n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+n}}{k!\cdot n!} \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+n}}{(k+n)!} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k!},$$

da hier im Nenner kleinere Faktoren $(1,\dots,n)$ durch größere $(k+1,\dots,k+n)$ ersetzt werden.

Aufgabe 6: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^n}{e^y}$ $\quad (= „\frac{+\infty}{+\infty}")$

$$\overset{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{(y^n)'}{(e^y)'} = \ldots = \lim_{y\to\infty} \frac{(y^n)^{(n)}}{(e^y)^{(n)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{n!}{e^y} = 0 .$$

b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$, $f(x) = 0$ für $x \leq 0$

zz: f beliebig oft diffbar.

$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x > 0$ mit Polynom P_n.

IA: $f^{(1)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$; $P_1(y) = y^2$.

IV: Sei $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist

$$f^{(n+1)}(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} \cdot P_n\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot P_n\left(\tfrac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x}} \cdot P_n'\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\left(P_n\left(\tfrac{1}{x}\right) - P_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \cdot P_{n+1}\left(\tfrac{1}{x}\right), \text{ wobei } P_{n+1}(y) = y^2\left(P_n(y) - P_n'(y)\right).$$

Damit ist klar, dass f in $x > 0$ beliebig oft diffbar ist.

Ebenso für $x < 0$: Hier ist $f(x) = 0$ und damit $f^{(n)}(x) = 0$.

Noch zu zeigen: f ist auch in $x = 0$ beliebig oft diffbar.

Beweis per Induktion, dass f in 0 beliebig oft diffbar und $f^{(n)}(0) = 0$:

IA: $n = 0$: $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ ✓

IV: Sei f in 0 n-mal diffbar und $f^{(n)}(0) = 0$.

Dann ist auch $f^{(n+1)}(0) = 0$.

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} .$$

Um zu klären, ob dieser Grenzwert tatsächlich existiert und $= 0$ ist, betrachten wir den links- und den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0 .$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0 .$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x} = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = 0 .$$

Damit ist das Taylorpolynom vom Grad n der Funktion f in $a = 0$

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

und trotzdem ist die Funktion f in keiner echten Umgebung der Null $= 0$.