

Analysis I, Globalübung 1

Die Globalübung der Analysis I dient allen, die sich immer noch nicht mit den geübten Themen wohl fühlen, als eine weitere Übungsmöglichkeit. Die von den Studenten vorgeschlagene Aufgaben werden während der Globalübung diskutiert.

Aufgabe 1.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

(a) $|3x| + 2 \leq |x - 6|$, (b) $|x^2 - 25| \leq 24$,
(c) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$, (d) $|x + 10| = |2x + 1| + 3$.

Aufgabe 2.

Skizzieren Sie den Graph der Funktion:

(a) $f(x) = |x + 1| + |2x + 4| - |3x + 9|$, (b) $f(x) = |x - 1| + |x + 4|$.

Aufgabe 3.

Skizzieren Sie die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die die Ungleichung $|x| + |y| \leq 1$ gilt.

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie, abhängig von dem Parameter a , die Anzahl der Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ |x| + a = y \end{cases}$$

Aufgabe 5.

Entscheiden Sie, ob die folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen gilt:

(a) $x \leq |x|$, (b) $1 \leq |1 + x| + x$, (c) $-1 \leq |-1 + x| + x$, (d) $1 \leq |1 - x| + x$,
(e) $x \leq |x + 1| + 1$, (f) $-x \leq |-x + 1| + 1$, (g) $-x \leq |-x - 1| + 1$.

Aufgabe 6.

Lösen Sie die folgende Gleichung und die Ungleichung:

(a) $[x] = 2x$, (b) $[x] \leq |x|$.

Bemerkung: $[x]$ steht für die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, z.B. $[3,54] = 3$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-\pi] = -4$, $[17] = 17$.

Aufgabe 7.

Beschreiben Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$, wobei

$$A = \{2n \mid n - \text{eine ganze Zahl}\}, \quad B = \{3n + 1 \mid n - \text{eine ganze Zahl}\}.$$

Aufgabe 8.

Beweisen Sie, dass für die Mengen A , B und C gilt:

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, (b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Aufgabe 9.

Sei \mathcal{F} die Familie aller offenen Intervalle in \mathbb{R} , die die Zahl 0 enthalten. Beweisen Sie, dass

$$\bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = \{0\}.$$