Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

16.11.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Globalübung 2

Die Globalübung der Analysis I dient allen, die sich immer noch nicht mit den geübten Themen wohl fühlen, als eine weitere Übungsmöglichkeit. Die von den Studenten vorgeschlagene Aufgaben werden während der Globalübung diskutiert.

Aufgabe 1.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Gleichheiten gelten:

(a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$,

(b) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$,

(c) $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^n+1$,

(d) $(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1$.

Bemerkung: $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

Aufgabe 2.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{2}=\frac{n\cdot((n-1)!)^2}{2^{n-1}} .$$

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Ungleichung gilt

(a) $100n<2^n+577$, (b) $10n<2^n+25$, (c) $10n<(3+(-1)^n)^n+23$.

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung gilt

$$\binom{2n}{n}>\frac{2^{2n-1}}{n} .$$

Aufgabe 5.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Zahl

$$1^1+2^2+3^3+\ldots+n^n+\frac{n(n+1)}{2}$$

gerade ist.

Aufgabe 6.
Über die Aussage $A(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ weiß man:

1. $A(1)$ und $A(2)$ stimmen;
2. Wenn $A(n)$ stimmt, dann stimmt $A(n^2)$ auch;
3. Wenn $n\geq 2$ und $A(n)$ stimmt, dann stimmt auch $A(n-1)$.

Kann man daraus schließen, dass $A(N)$ für alle natürlichen Zahlen N stimmt?

Aufgabe 7.
Über die Aussage $B(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ weiß man:

1. $B(1)$ stimmt;
2. Wenn $B(n)$ stimmt, dann stimmt $B(2n)$ auch;
3. Wenn $n\geq 12$ und $B(n)$ stimmt, dann stimmt auch $B(n-11)$.

Kann man daraus schließen, dass $B(N)$ für alle natürlichen Zahlen N stimmt?

Aufgabe 8.
Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl. Ein Springer befindet sich auf dem linken unteren Feld eines $n \times n$ Schachbretts. Beweisen Sie, dass er das rechte obere Feld mit genau

$$2 \cdot \left[\frac{n+1}{3}\right]$$

Zügen erreichen kann.

Bemerkung: $[x]$ steht für die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Aufgabe 9.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$, die folgende Ungleichung gilt:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

Tipp: $\frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$.

Aufgabe 10.
Die Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ sind durch die folgenden Bedingungen festgelegt: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ und $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ für alle $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Gleichheit gilt

$$u_{n+2} \cdot u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Aufgabe 11.
Als $p(n)$ bezeichne man die Anzahl aller Primzahlen, die nicht größer als n sind. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, sodass $p(n) \leq n/2$ gilt.

Aufgabe 12.
Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und seien $A, B \subseteq Y$, $B_i \subseteq Y$ $(i \in I)$ beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$; (b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

(c) $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$.

Aufgabe 13.
Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und seien $B_i \subseteq Y$ $(i \in I)$ beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} (Y \setminus B_i)\right) = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)$; (b) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} (Y \setminus B_i)\right) = X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)\right)$.

Aufgabe 14.
Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und seien $A, B \subseteq X$ beliebige Mengen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen gelten:

(a) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$; (b) $f(A) \setminus f(B) \supseteq f(A \setminus B)$.

Sei f zusätzlich injektiv. Gilt dann die Aussage $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$?