Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

30.11.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Globalübung 3

Aufgabe 1.
Seien $a>1$ und p eine natürliche Zahl. Beweisen Sie die folgenden Gleichheiten:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad (3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0,\quad (4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

Bemerkung: **Diese Grenzwerte sind wichtig! Wir werden diese Grenzwerte in der Vorlesung benutzen und gehen davon aus, dass alle Studenten sie kennen.**
Hinweise zu den Beweisen: Für (1) benutzen Sie die Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für } x>-1 \text{ und } n\in\mathbb{N}.$$

Um (2) zu bekommen, beweisen Sie zuerst, dass

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad \text{für } x>0 \text{ und } n\in\mathbb{N}$$

gilt. Gleichheit (3) beweisen Sie zuerst für $p=1$. Für (4) benutzen Sie (2).

Aufgabe 2.
Beweisen Sie, dass die Folgen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n=\sqrt[n]{2n+1}$, (b) $b_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$, (c) $c_n=\sqrt[n]{2^n+n^2}$, (d) $d_n=\dfrac{2^{2n+1}+n^5}{3^n+4^n}$,

(e) $e_n=\dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$, (f) $f_n=\dfrac{\log_2(2n)}{\log_2 n}$, (g) $g_n=\dfrac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}$ (h) $h_n=\dfrac{n!}{n^n}$,

(j) $j_n=\dfrac{n^{23}}{n!}$, (k) $k_n=\dfrac{3n+(2+(-1)^n)\log_2 n}{\sqrt{n^2+1}}$, (l) $l_n=\sqrt[n^2]{n}$, (p) $p_n=\dfrac{n^5\cdot 2^n}{3^{n+3}}$,

(q) $q_n=\dfrac{n-\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, (r) $r_n=\sqrt{n\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)}$, (s) $s_n=\sqrt[2n]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+n^{3/2}}$.

Aufgabe 3.
Sei a_n eine Folge, die gegen einen Grenzwert $g>0$ konvergiert. Beweisen Sie, dass die Folge $b_n=\sqrt[n]{a_n}$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 4.
Sei a_n eine Folge, die gegen einen Grenzwert $-1<g<1$ konvergiert. Beweisen Sie, dass die Folge $b_n=(a_n)^n$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.
Untersuchen Sie, ob die Folge x_n konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.
(a) $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ für $n\geq 1$; (b) $x_1=1/2$, $x_{n+1}=x_n-x_n^2$ für $n\geq 1$;
(c) $x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n}{2+x_n}$ für $n\geq 1$; (d) $x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{1+2x_n}{1+x_n}$ dla $n\geq 1$.

Aufgabe 6.
Entscheiden Sie, ob das Supremum oder das Infimum der folgenden Mengen existieren. Falls ja, bestimmen Sie sie.

$$A=\left\{\frac{xy^2}{x^2+y^4} : x,y\in\mathbb{R} \text{ und } x^2+y^4\neq 0\right\},\qquad B=\left\{\frac{1+(-1)^{m+n}}{m^3+n} : m,n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$C=\left\{\frac{mn}{m^2+n^2} : m,n\in\mathbb{N} \text{ und } m<n\right\},\qquad D=\left\{\frac{m^3+(-2)^n}{m^3+3^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$E=\left\{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} : a,b,c\in\mathbb{R} \text{ und } a,b,c>0\right\}.$$