Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

4.1.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Globalübung 5

Aufgabe 1.
Beweisen Sie mit der ε-δ Definition, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Ist f auf $\mathbb{R}$ auch gleichmäßig stetig?

Aufgabe 2.
Beweisen Sie mit der ε-δ Definition, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

auf $[1,\infty)$ stetig ist. Ist f auf $[1,\infty)$ auch gleichmäßig stetig?

Aufgabe 3.
Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $b \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei

$$M := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < b\} \quad \text{and} \quad N := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\}.$$

Beweisen Sie, dass M offen und N abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv und es gelte

$$\frac{f(x) - f(x)}{x - y} > 0$$

für alle $x \neq y$. Beweisen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Ist f stetig?

Aufgabe 5.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit der Eigenschaft: für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \in \mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass f eine konstante Funktion ist.

Aufgabe 6.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle: $f(1000) = 999$ und $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie $f(500)$.

Aufgabe 7.
Entscheiden Sie, ob es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden reellen Wert genau
(a) zweimal, (b) dreimal
annimmt.

Aufgabe 8.
Seien $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$ und n eine positive, ganze Zahl. Beweisen Sie, dass es eine Zahl $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ mit $f(x) = f(x+\frac{1}{n})$ gibt.

Aufgabe 9.
Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen mit $f(1) = 1$ und

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$