Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

18.1.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Globalübung 6

Aufgabe 1.
Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|\log(2+3x^2) - \log(2+3y^2)| \le \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot |x-y|\,.$$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^x-4}{x-2}$, (d) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\log(\log x)}{x-e}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\log(1+x\log x)}{2^x\log x - \log x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^{2x}-1}{\log x \cdot \log(1+x)}$, (g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)/x^4}$,

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+1}\right)^{x}$, (i) $\lim\limits_{x\to 0+} x(\log x)^{10}$.

Aufgabe 3.
Ist es möglich die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ so zu definieren, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar wird? Falls ja, bestimmen Sie $f(0)$ und $f'(0)$.

(a) $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$, (b) $f(x) = \frac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2}$, (c) $f(x) = |x|^x$.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f differenzierbar ist.
(a) $f(x)=\sqrt{|\log x|}$, (b) $f(x)=e^{-|x|}$, (c) $f(x)=\log_2|\log_5 x|$, (d) $f(x)=(e^{|x|}-1)\sqrt{|x|}$.

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die die folgende Gleichheit erfüllen:
(a) $f'(x) = x^5$, (b) $f'(x) = e^x f(x)$.

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen (falls sie existieren):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n}-1)n}{\log_2 n}$.