Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

1.2.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Globalübung 7

Aufgabe 1. Stolzscher Satz: „die Regel von de l'Hospital" für Folgen
Seien (x_n), (y_n) Folgen mit $y_n \to +\infty$ und $y_{n+1} > y_n$ für alle $n \geq n_0$. Wir nehmen an, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

existiert und gleich g ist. Beweisen Sie, dass auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

existiert und gleich g ist.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Aussage für $g=0$. Sie werden dazu die folgende Gleichheit

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}} \cdot \left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0}}{y_n}, \quad \text{für } n > n_0$$

benötigen.

Aufgabe 2.
Sei (a_n) eine Folge, die gegen eine Zahl g konvergiert.

(a) Beweisen Sie, dass die Folge $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ auch gegen g konvergiert.

(b) Angenommen die Folge (b_n) konvergiert. Kann man daraus schließen, dass die Folge (a_n) auch konvergiert?

(c) Seien zusätzlich $a_n > 0$ und $g > 0$. Beweisen Sie, dass die Folge $c_n = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$ konvergiert und der Grenzwert gleich g ist.

Aufgabe 3.
Sei (x_n) eine Folge mit $x_n > 0$. Angenommen der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

existiert und ist gleich $g > 0$. Beweisen Sie, dass dann auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$$

existiert und gleich g ist.

Aufgabe 4.
Sei $p > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Folgengrenzwerte (falls sie existieren).

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\log n}$,

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n und alle positiven Zahlen x mit $x < \sqrt[n]{n!}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$e^x \leq \frac{n!}{n!-x^n} \cdot \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Aufgabe 6.
(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{-1/x}}{x^n}$.

Hinweis: de l'Hospital nach einer Substitution.

(b) Sei $f(x)=e^{-1/x}$ für $x>0$ und $f(x)=0$ für $x\leq 0$. Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und berechnen Sie das Taylorpolynom $P_{n,a}$ vom Grad n der Funktion f im Punkt $a=0$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $f^{(n)}(x)=e^{-1/x}P_n(1/x)$ für $x>0$, wobei P_n ein Polynom ist.