

1 Hausübungen

A. 1: (a) i.

Sei $x < -4$. Dann ist $\left| \frac{x+4}{x-2} \right| = \frac{x+4}{x-2}$, also bekommen wir :
$$\frac{x+4}{x-2} < x \Leftrightarrow (x-4)(x+1) < 0.$$

Da $x < -4$, bekommen wir in diesem Fall keine Lösungen.

ii.

Sei $-4 \leq x < 2$. Dann ist $\left| \frac{x+4}{x-2} \right| = \frac{x+4}{2-x}$, also ist
$$\frac{x+4}{2-x} < x \Leftrightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{4} > 0.$$

Es gibt aber keine reelle Zahl, die die letzte Ungleichung erfüllt, also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

iii.

Sei $x > 2$. Dann ist $\left| \frac{x+4}{x-2} \right| = \frac{x+4}{x-2}$. Also ist $\frac{x+4}{x-2} < x$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x+1) > 0.$$

Da die letzte Ungleichung für alle $x > 4$ wahr ist,
ist $\mathbb{L} := \{x : x > 4\}$ die Menge der Lösungen.

(b) i.

Sei $x < a$. Dann ist $|x-a| + |x-b| = a-x+b-x$.
Also ist $a-x+b-x \leq b-a \Leftrightarrow x \geq a$.

Da $x < a$ ist, bekommen wir in diesem Fall keine Lösungen.

ii.

Sei $a \leq x \leq b$. Dann ist $|x-a| + |x-b| = x-a+b-x = b-a$.

Da $b-a \leq b-a$, erfüllt jedes x mit $a \leq x \leq b$ unsere Ungleichung.

iii.

Sei $x > b$. Dann ist $|x-a| + |x-b| = x-a+x-b = 2x-a-b$
Also ist: $2x-a-b \leq b-a \Leftrightarrow x \leq b$.

Da $x > b$ ist, bekommen wir in diesem Fall keine Lösungen.

Somit muss gelten : $x \in [a, b]$.

A. 2: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$

Da letzteres immer wahr ist, stimmt auch die erste Ungleichung. Gleichheit gilt genau dann, wenn $(x-y)^2 = 0$ ist, also genau dann, wenn $x = y$.