10 Hausübungen

A. 1: Da $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ stetig ist, ist f auf $[0, 1]$ auch gleichmäßig stetig.

Um zu zeigen, dass f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, genügt es zu beweisen, dass f auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle: $\delta = 2\varepsilon$. Dann ist:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon \text{ für } x,y \in [1, \infty) \text{ mit } |x-y| < \delta.$$

A. 2: Sei $f(x) = \log_2(3x + 2) - 2x$. Dann ist f auf $[0, \infty)$ stetig.

Außerdem: $f(0) = 1 > 0$ und $f(2) = \log_2 8 - 4 = 3 - 4 < 0$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt: es gibt ein $x \in (0, 2)$ mit $f(x) = 0$.

A. 3: Wenn $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$, dann ist $a = 0$ oder $a = 1$. Nehmen wir also an, dass $f(0) \neq 0$ und $f(1) \neq 1$, d.h. $f(0) > 0, f(1) < 1$.

Sei $g(x) = f(x) - x$. Dann ist g auf $[0, 1]$ stetig und $g(0) = f(0) > 0$, $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt:

$\exists\, a \in (0, 1)$ mit $g(a) = 0$, d.h. $f(a) = a$.

A. 4: Aus der Definition der Stetigkeit in x_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wähle $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt: $f(x) - f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2}$ und $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$.