12 Hausübungen

A. 1: Wir bestimmen die Ableitung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{x+1}{x^2}\right)^x = e^{x\log\frac{x+1}{x^2}}.\\
f'(x) &= e^{x\log\frac{x+1}{x^2}} \cdot \left(x\log\frac{x+1}{x^2}\right)' =\\
&\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^x \cdot \left(1\cdot\log\frac{x+1}{x^2} + x\cdot\frac{x^2}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x^2}\right)'\right)\\
\left(\frac{x+1}{x^2}\right)' &= \frac{x^2\cdot 1-(x+1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3}.
\end{aligned}
$$

Damit ist für $-1 < x \neq 0$:

$$
f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)^x \left(\log\frac{x+1}{x^2} - \frac{x+2}{x+1}\right).
$$

A. 2: Es gilt:

$$
\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^x = e^{x\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}.
$$

Wir wollen also den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} x\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ finden.

$$
x\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\log(1+t)}{t}\cdot y,
$$

wobei $t = -\frac{1}{x^2}, y = -\frac{1}{x}$. Da $x \to +\infty$, ist $t \to 0, y \to 0$. Damit bekommen wir $\lim\limits_{x\to+\infty} x\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1\cdot 0 = 0$. Also ist $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1$.

A. 3: Mit der gegebenen Eigenschaft gilt für den Differenzenquotienten:

$$
\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le \frac{c\cdot|h|^a}{|h|} = c|h|^{a-1} \underset{h\to 0}{\to} 0.
$$

Daraus folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

D.h. f ist eine konstante Funktion.

A. 4: (a) Die Durchschnittsgeschwindigkeit lässt sich mit dem Differenzenquotienten berechnen (zurückgelegter Weg im Zeitintervall $[4, 4 + h]$ dividiert durch die dafür benötigte Zeit h): $\frac{s(4+h)-s(4)}{h} = \frac{0{,}4(4+h)^2-0{,}4\cdot 4^2}{h} = \frac{0{,}4(16+8h+h^2)-0{,}4\cdot 16}{h} = \frac{3{,}2h+0{,}4h^2}{h} = 3,2 + 0,4h$

(b) Die Momentangeschwindigkeit ist der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ (man lässt also die Länge des Zeitintervalls bei der Durchschnittsgeschwindigkeit gegen Null gehen):

$$\lim_{h\to 0}(3,2 + 0,4h) = 3,2$$

Die Momentangeschwindigkeit beträgt zum Zeitpunkt $t = 4$ also $3,2$ m/s. Alternativ könnte man auch zuerst die Ableitungsfunktion $v(t) = s'(t)$ berechnen und dann an der Stelle $t = 4$ auswerten.

(c) Die lokale Druckänderung kann wieder durch die Ableitung bestimmt werden: $p'(h) = 101325 \cdot e^{-\frac{h}{7990}} \cdot (-\frac{1}{7990})$. Auf Meeresniveau ergibt sich damit $p'(0) \approx -12,68$ Pa/m, auf 3000 m Seehöhe $p'(3000) \approx -8,71$ Pa/m. Der Luftdruck nimmt also in großer Höhe pro zusätzlichem Höhenmeter um weniger ab, als auf Meeresniveau.