13 Hausübungen

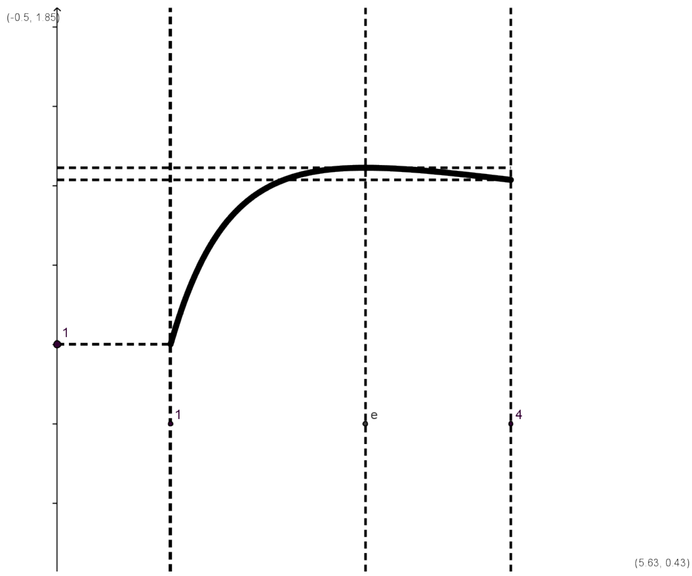
A. 1:

$$f(x) = x^{1/x} = \mathrm{e}^{\frac{\log x}{x}}, \ f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{\log x}{x}} \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \log x \cdot 1}{x^2} =$$

$$= x^{1/x} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}. \text{ Daraus folgt:}$$

$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \log x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \mathrm{e}$ und
$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}$.
Also ist f auf $[1, \mathrm{e})$ monoton-wachsend und auf $(\mathrm{e}, 4)$ monoton-fallend. Daraus folgt, dass $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ das Maximum von f ist.
$f(1) = 1, \ f(4) = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} > 1$. Damit ist $f(1) = 1$ das Minimum von f.

$$f(\pi) < f(\mathrm{e}) \quad \Leftrightarrow \quad \pi^{1/\pi} < \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}$$



A. 2: Mit der Taylorformel bekommen wir :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 \quad \text{mit } 0 < \theta < 1.$$

Da f'' auf $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $f''(x)$ auf $[-1, 1]$ beschränkt.
Daraus folgt: $\exists\, c > 0$ mit $\left|f''(x)\right| \leq 2c$ für alle $x \in [-1, 1]$.

$$|f(x)| = \left|\frac{f''(\theta x)}{2}\right| x^2 \leq cx^2, \ \text{da } \theta x \in [-1, 1].$$

A. 3: (a) $A(r) = r^2\pi$. Damit gilt: $A'(r) = 2r\pi$, was also genau den Kreisumfang liefert.

(b) Die absolute Änderung des Flächeninhalts ist:

$$A(r + \Delta r) - A(r) = (r + \Delta r)^2\pi - r^2\pi = r^2\pi + 2r\Delta r\pi + \Delta r^2\pi - r^2\pi =$$
$$= 2r\pi \cdot \Delta r + \Delta r^2\pi$$

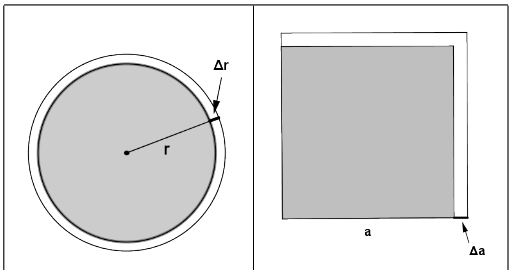


Abbildung 1 Abbildung 2

In Abbildung 1 entspricht dieser absoluten Änderung das neu hinzugekommene, weiße Flächenstück. Im Ergebnis kommt der Term $2r\pi \cdot \Delta r$ vor, also der Kreisumfang $2r\pi$ multipliziert mit der kleinen Strecke Δr. Das entspricht einer Rechtecksfläche mit den Seitenlängen $2r\pi$ und Δr. In der Zeichnung erkennt man, dass die weiße Fläche tatsächlich in guter Näherung gleich dieser Rechtecksfläche ist (Der Fehler, den man dabei macht, ist der zweite Term $\Delta r^2\pi$. Dieser Fehler ist allerdings sehr klein, weil Δr^2 sehr klein ist - positive Zahlen nahe Null werden beim Quadrieren ja noch kleiner!).

(c) Die mittlere Änderungsrate ist $\frac{A(r+\Delta r)-A(r)}{\Delta r} = \frac{2r\pi\Delta r+\Delta r^2\pi}{\Delta r} = 2r\pi + \Delta r\pi$. Lässt man Δr gegen Null gehen, konvergiert dieser Ausdruck gegen $2r\pi$. Die lokale Änderungsrate ist also sogar *exakt* gleich dem Kreisumfang!

(d) Die Ableitung des Quadratflächeninhalts ist $A'(a) = 2a$. Diesmal ist das Ergebnis also nur der halbe Quadratumfang! Warum ist das so? Zeichnet man ein Quadrat und verlängert die Seitenlängen um ein kleines Stück Δa, so erhält man Abbildung 2.
Die absolute Änderung des Flächeninhalts ist

$$A(a + \Delta a) - A(a) = (a + \Delta a)^2 - a^2 = 2a \cdot \Delta a + \Delta a^2$$

Diesmal kommt also annähernd eine Rechtecksfläche mit den Seitenlängen $2a$ und Δa hinzu (Δa^2 ist aufgrund seiner „Kleinheit" wieder zu vernachlässigen). Das spiegelt sich auch in der Zeichnung wider: Eine Verlängerung der Seitenlängen um Δa bewirkt eine Vergrößerung des Quadratflächeninhalts in (nur) zwei Richtungen (das ist der Unterschied zum Kreis!). Das neu hinzukommende, weiße Flächenstück ist dabei ungefähr so groß wie die Fläche „halber Umfang multipliziert mit dem kleinen Stück Δa".
Die lokale Änderungsrate ist dann sogar wieder *exakt* der halbe Umfang $2a$.