14 Hausübungen

A. 1: (a)

$$f(x) = x^8 + x^2 + 10x - 15. \;\; f'(x) = 8x^7 + 2x + 10$$

Um $f'(x) = 0$ zu lösen, beachten wir, dass $f'(x)$ monoton-steigend ist, da $f''(x) = 56x^6 + 2 > 0$.
D.h. die Gleichung $f'(x) = 0$ hat höchstens eine Lösung. Andererseits, $x = -1$ erfüllt diese Gleichung. Also ist $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$.
Da $f''(-1) > 0$, hat f an der Stelle $x = -1$ ein lokales Minimum.
Da $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist f auf $\mathbb{R}$ konvex.

(b)

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2) + e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also ist $f''(0) < 0$ und f hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Maximum.
f ist auf $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ konvex und auf $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ konkav.

A. 2: (a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$. Dann ist $f_n(x) \to 0$ für alle $x \in [0, 1]$.
Sei $a_n \coloneqq \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left(x^n - x^{2n}\right)$. Dann ist

$$a_n \geq \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} \quad \left(x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \text{ ist eingesetzt}\right)$$

$$a_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow a_n \text{ kann nicht gegen 0 konvergieren.}$$

D.h. $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen 0, aber nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$.

(b)

$$f_n(x) = \frac{n}{n + x^2} \to 1 = f(x).$$

$$a_n \coloneqq \sup_{x\in[0,2]} \left|\frac{n}{n + x^2} - 1\right| = \sup_{x\in[0,2]} \left(1 - \frac{1}{n + x^2}\right).$$

Da $1 - \dfrac{n}{n + x^2} \leq 1 - \dfrac{n}{n + 4}$ für alle $x \in [0, 2]$ gilt, bekommen wir:

$$0 \leq a_n \leq 1 - \frac{n}{n + 4} \to 0.$$

Daraus folgt: f_n konvergiert punktweise und auch gleichmäßig auf $[0, 2]$ gegen $f(x) = 1$.

A. 3: Sei $f(x) = \sqrt{x} + x^2$. Dann ist $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$,

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 2 > -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^3}} + 2 \;=\; 0 \quad \text{für } x > \frac{1}{4}$$

Daraus folgt, dass f auf $[\frac{1}{4}, +\infty)$ konvex ist.
Damit bekommen wir :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} + x_i^2 \geq n \cdot f\left(\frac{a}{n}\right) = n \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{n}} + \frac{a^2}{n^2}\right) =$$

$$= \sqrt{an} + \frac{a^2}{n}.$$