2 Hausübungen

A. 1: $x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup X) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I \quad x \in A_i \cup X \quad \Leftrightarrow$

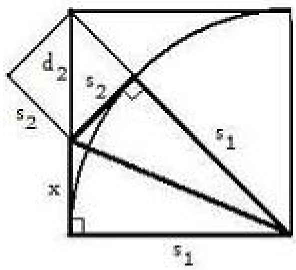
$$\Leftrightarrow \quad \forall i \in I \quad (x \in A_i \text{ oder } x \in X) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in I \quad x \in A_i) \text{ oder } x \in X \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ oder } x \in X \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup X$$

A. 2: (a) Nein! Wählen wir z.B. folgende Teilmengen:
$A_1 = \{0;1\}, A_2 = \{1;2\}, A_3 = \{0;2\}$.
Dann ist $\quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset, A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$,
aber $\quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

(b) Nein! Wählen wir z.B. die Intervalle $A_i = (0, i)$, wobei i eine reelle Zahl mit $0<i<1$ ist. Dann ist für $i<j<k \quad A_i \cap A_k \cap A_j = A_i \neq \emptyset$,
aber $\bigcap_{i\in(0,1)} A_i = \emptyset$ wie wir aus der Vorlesung wissen.

A. 3: (a)



Die beiden fett eingeziechneten Dreiecke
sind kongruent (rechtwinklich, gleiche Hypothenusen,
gleich lange Katheten $s_1 \Rightarrow$ auch die zwiete Kathete
muss gleich lang sein).
Also $x = s_2$.
Damit : $d_2 = s_1 - x = s_1 - s_2 = s_1 - (d_1 - s_1) = 2s_1 - d_1 \square$

(b) $\quad s_2 = d_1 - s_1 = n_1c - m_1c = (n_1 - m_1)c \qquad n_1 - m_1 \in \mathbb{N}$, da $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ und $n_1 > m_1$
$\quad d_2 = 2s_1 - d_1 = 2m_1c - n_1 - = (2m_1 - n_1)c \qquad 2m_1 - n_1 \in \mathbb{N}$, da $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ und $2m_1 > n_1$
erhält man aus der Δ-Ungleichung

Damit sind s_2 und d_2 durch c messbar.
$s_2 = (n_1 - m_1)c =: m_2c \quad$ mit $\quad m_2 < m_1$.
Führt man diesen Prozess fort, so erhält man auch $s_3 = m_3c, s_4 = m_4c$,
usw. wobei $m_1 > m_2 > m_3 > \dots$ und $m_i \in \mathbb{N}$ gilt. Nach spätestens m_1
Iterationen ist das nicht mehr möglich ($m_{m_1} \notin \mathbb{N}$).