3 Hausübungen

A. 1: Induktion: n=1 : $1 = \frac{2\cdot 1 - 1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4}$ ✓

Wir nehmen an, für ein $n \geq 1$ gilt:

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} + (n+1) \cdot 3^n = \frac{2n+1}{4} \cdot 3^{n+1} + \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Wegen (1) ist (2) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} + (n+1) \cdot 3^n = \frac{2n+1}{4} \cdot 3^{n+1} + \frac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \frac{2n-1}{4} + (n+1) = \frac{2n+1}{4} \cdot 3 \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad 2n - 1 + 4n + 4 = 6n + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 6n + 3 = 6n + 3 & \end{aligned}$$

Diese Gleichheit stimmt für alle $n \geq 1$, also ist der Beweis zu Ende.

A. 2: Wir beweisen, dass die Ungleichung für alle $n \geq 1$ wahr ist:

Induktion: n=1 : $\binom{3}{1} = 3 < 7^1$ ✓

Wir nehmen an, dass es für ein $n \geq 1$ gilt:

$$\binom{3n}{n} < 7^n. \tag{3}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\binom{3n+3}{n+1} < 7^{n+1}. \tag{4}$$

Wegen (3) gilt:

$$\begin{aligned} \binom{3n+3}{n+1} = \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{n!(n+1) \cdot (2n)!(2n+1)(2n+2)} &= \binom{3n}{n} \cdot \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &< 7^n \cdot \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Der Beweis ist zu Ende, wenn wir zeigen:

$$
\begin{aligned}
7^n \cdot \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(2n+1)(2n+2)} &< 7^{n+1} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 3(3n+1)(3n+2) &< 7(2n+1)(2n+2) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 3(9n^2+9n+2) &< 7(4n^2+6n+2) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 27n^2+27n+6 &< 28n^2+42n+14 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 0 &< n^2+15n+8.
\end{aligned}
$$

Letzteres gilt für alle $n \geq 1$, also ist auch (4) bewiesen!

A. 3: Wir überprüfen, dass die Ungleichung für $n = 1, 2, 3, 4$ stimmt, für $n = 5$ und 6 nicht und für $n = 7$ stimmt. Wir fangen also die Induktion mit $n = 7$ an:

Angenommen die Ungleichung gilt für ein $n \geq 7$:

$$30n < 2^n + 110. \tag{5}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$30(n+1) < 2^{n+1} + 110. \tag{6}$$

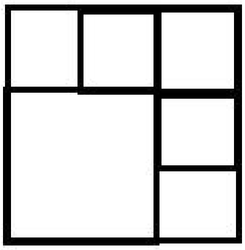
Wegen (5) erhalten wir: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(30n - 110)$.

Es bleibt zu zeigen:

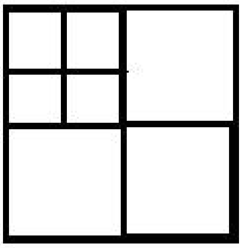
$$
\begin{aligned}
2(30n-110) &\geq 30(n+1) - 110 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 60n - 220 &\geq 30n + 30 - 110 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 30n &\geq 140 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad n &\geq \frac{14}{3}.
\end{aligned}
$$

Die letzte Unglichung stimmt für $n \geq 7$ also ist der Beweis zu Ende.

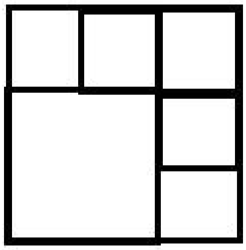
A. 4:



n=6



n= 7



n=8

Angenommen das Quadrat Q ist schon in n kleinere Quadrate aufgeteil. Wenn man nun eines der kleineren Quadrate wieder in 4 Quadrate aufteilt, so ist das Quadrat Q in n+3 kleinere Quadrate aufgeteilt.

Da die Aussage für n= 6,7 und 8 stimmt (s.oben) und da $T(n) \Rightarrow T(n+3)$, stimmt die Aussage für alle $n \geq 6$.