4 Hausübungen

A. 1: (a) Da $\frac{x}{x+1} > 0$, ist 0 eine untere Schranke von A. Um zu zeigen, dass $\inf A = 0$ gilt, müssen wir beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x > 0 : \frac{x}{x+1} < \varepsilon. \tag{1}$$

Wenn $\varepsilon \geq 1$ ist, gilt die Aussage (1) für jedes $x > 0$.

Sei also $0 < \varepsilon < 1$. Dann ist
$\frac{x}{x+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.
Da $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > 0$ gibt es eine Zahl $x > 0$ mit $x < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.
Diese Zahl x wählen wir und damit ist (1) bewiesen.

Da $\frac{x}{x+1} < 1 \quad \forall x > 0$ gilt, ist 1 eine obere Schranke von A. Um zu zeigen, dass $\sup A = 1$, müssen wir beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x > 0 : \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Für $\varepsilon \geq 1$ stimmt (2) $\forall x > 0$. Sei also $0 < \varepsilon < 1$. Dann ist
$\frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.
Wir wählen also eine Zahl x, die größer als $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ist.

Damit ist (2) bewiesen.

(b) Für $y = 0$ bekommen wir $x^2 + 1 \in B$. Da $x^2 + 1$ beliebig groß sein kann, ist die Menge B von oben nicht beschränkt, d.h. $\sup B$ existiert nicht.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 + (xy - 1)^2 \geq 0$, also ist 0 eine untere Schranke von B.

Um zu zeigen, dass $\inf B = 0$ müssen wir beweisen:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + (xy - 1)^2 < \varepsilon$.

Wähle: $0 < x < \sqrt{\varepsilon}$ und $y = 1/x$. Dann ist $x^2 + (xy - 1)^2 = x^2 < \varepsilon$

Damit ist $\inf B = 0$.

A. 2: Hier beweisen wir einfach, dass $f(x) = |x| + 1$ sein muss.

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass $|x - a| \leq |x| + |a| < |x| + 1$.

Also ist $|x| + 1$ eine obere Schranke der Menge

$A(x) := \{|x - a| \ : a \in (-1, 1)\}$.

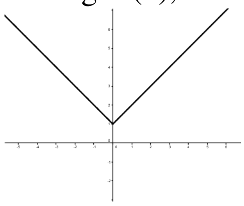
Um zu zeigen, dass $\sup A(x) = |x| + 1$, müssen wir noch beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in (-1, 1) \quad : \quad |x - a| \geq |x| + 1 - \varepsilon. \tag{3}$$

Wenn $\varepsilon \geq 2$ ist, wähle $a = 0$. Sei also $0 < \varepsilon < 2$.

Für $x \leq 0$ wähle: $a = 1 - \varepsilon$ und für $x > 0$ wähle $a = -1 + \varepsilon$.

Dann gilt (3), also ist $f(x) = \sup A(x) = |x| + 1$.



A. 3: (a) Ja. Sei $a + b = p, b + c = q, c + a = r$. Dann ist

$a = \frac{1}{2}(p + r - q), b = \frac{1}{2}(p + q - r), c = \frac{1}{2}(q + r - p)$

Da p, q, r rational sind, sind auch a, b, c rational.

(b) Nein. Wähle $a = c = \sqrt{2}$ und $b = d = -\sqrt{2}$.

Dann ist $a+b = b+c = c+d = d+a = 0$, aber a, b, c, d sind irrational.