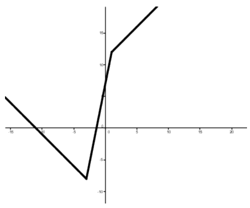
5 Hausübungen

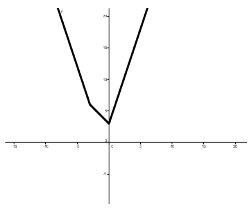
A. 1: (a) Die Funktion ist stückweise linear. Ihre Steiung ändert sich dort, wo sich die Vorzeichen der Betragsargumente ändern, also bei $x = -3$ und bei $x = 1$. An der Stelle $x = -3$ nimmt die Funktion den Wert $f(-3) = -8$ an. Links von -3 sind beide Betragsargumente negativ, das ergibt insgesamt eine Steigung von $-3-(-2) = -1$, zwischen -3 und 1 ist nur noch das zweite Betragsargument negativ, das liefert eine Steigung von $3-(-2) = 5$ und rechts von 1 ergibt sich die Steigung zu $3-2 = 1$. Damit kann man zeichnen:



Stückweise definiert liefert das

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} -11-x & x < -3 \\ 7+5x & -3 \leq x < 1 \\ 11+x & x \geq 1 \end{cases}.$$

(b) Hier sieht der Funktionsgraph so aus:



Will man $f(x)$ als ein Objekt schreiben, so sieht man sich am besten zuerst die „Knickstellen“ an: $x = 0$ und $x = 3$. $f(x)$ muss also von der Form $f(x) = a \cdot |x| + b \cdot |x-3| + c$ sein. Aus den Steigungen gewinnt man $-a-b = -3$, $a-b = 1$ und $a+b = 3$. Das klappt nur für $a = 2$ und $b = 1$. Außerdem gilt: $f(0) = 2 \cdot |0| + 1 \cdot |0-3| + c = 3$ und damit $c = 0$. Also $f(x) = 2 \cdot |x| + |x-3|$.

A. 2: (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x+7 \geq 0\} = [-7, \infty)$.
Wir beweisen, dass $f : D \to \mathbb{R}$ nicht surjektiv ist.

Da $x+7 \geq 0$ ist, ist $f(x) = (x+7)\sqrt{x+7} - 8 \;\geq\; -8$.
D.h. es gibt kein x mit $f(x) = -9$.
Wir beweisen, dass f injektiv ist.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad (x_1+7)\sqrt{x_1+7} - 8 = (x_2+7)\sqrt{x_2+7} - 8 \quad &\Leftrightarrow \\ (x_1+7)^{\frac{3}{2}} = (x_2+7)^{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad (\text{ da } x^{\frac{3}{2}} \text{ injektiv})\; x_1 + 7 = x_2 + 7& \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2&. \end{aligned}$$

Also ist $f : D \to \mathbb{R}$ keine Bijektion.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}((-1,1)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in (-1,1) \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad (x+7)^{\frac{3}{2}} \in (7,9) \quad \Leftrightarrow \quad x+7 \in \left(7^{\frac{2}{3}}, 9^{\frac{2}{3}}\right) \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad x \in \left(7^{\frac{2}{3}} - 7\,,\, 9^{\frac{2}{3}} - 7\right)&. \end{aligned}$$

Also ist $f^{-1}((-1,1)) = \left(7^{\frac{2}{3}} - 7\,,\, 9^{\frac{2}{3}} - 7\right)$.

(b) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
Da $[a]$ eine ganze Zahl ist, ist $f(x) = 2\left[\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right]$ eine ganze gerade Zahl. D.h. $f : D \to \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv: es gibt kein x mit $f(x) = 1$.
f ist auch nicht injektiv, da $f(0) = 2\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ und $f(\frac{1}{9}) = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = 0$.
Also ist f auch keine Bijektion.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}((-1,1)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in (-1,1) \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right] = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} + \frac{1}{2} \in [0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)&. \end{aligned}$$

Also ist $f^{-1}((-1,1)) = \left[0, \frac{1}{4}\right)$.

A. 3: Wir beweisen, dass $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, x \in A \cap B : f(x) = y \\ \Rightarrow (\exists\, x_1 \in A : f(x_1) = y) &\wedge (\exists\, x_2 \in B : f(x_2) = y) (\text{wähle } x_1 = x_2 = x) \\ \Leftrightarrow \quad y \in f(A) \wedge y \in f(B) \quad &\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

$f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$ gilt nicht allgemein:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2, A = (-\infty, 0], B = [0, \infty)$.
Dann ist $f(A \cap B) = f(0) = 0 \not\supseteq [0, \infty) = f(A) \cap f(B)$.
Wenn zusätzlich f injektiv ist, dann ist $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. Um das zu beweisen genügt es zu zeigen:

$$(\exists\, x_1 \in A : f(x_1) = y) \wedge (\exists\, x_2 \in B : f(x_2) = y) \Rightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y.$$

Wenn f injektiv ist, liefert die Gleichung $f(x_1) = y = f(x_2)$, dass $x_1 = x_2$.
Sei also $x = x_1 = x_2$, dann ist $x \in A \cap B$ und $f(x) = y$.