6 Hausübungen

A. 1: (a)

$$a_n = \frac{\sqrt{3^n + 4^n}}{2^{n+1} + 52} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}}{2 + \frac{52}{2^n}}$$

Da $q^n \to 0$ für $|q| < 1$, ist $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ und $\dfrac{1}{2^n} \to 0$.

Damit konvergiert die Folge a_n gegen $\dfrac{\sqrt{0+1}}{2+0} = \dfrac{1}{2}$.

(b)

$$b_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n}}{2\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} = \frac{\sqrt{2 + \frac{2}{n}} + \sqrt{2}}{2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)} \to \frac{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}}{2\left(1 + \sqrt{1-0}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(c)

$$c_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

Zuerst beweisen wir, dass

$$\frac{n^2+1}{n^3+1} \leq \frac{n^2+2}{n^3+2} \leq \cdots \leq \frac{n^2+n}{n^3+n}. \tag{1}$$

Die Ungleichungen werden bewiesen, wenn wir zeigen:

$$\frac{n^2+k}{n^3+k} \geq \frac{n^2+(k-1)}{n^3+(k-1)} \qquad \text{für } k = 1, 2 \ldots, n$$

$$\frac{n^2+k}{n^3+k} \geq \frac{n^2+(k-1)}{n^3+(k-1)} \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1.$$

Also gilt auch (1).

$$n \cdot \frac{n^2+1}{n^3+1} \leq c_n \leq n \cdot \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

Da $\dfrac{n^3+n}{n^3+1} \to 1$ und $\dfrac{n^3+n}{n^3+n} \to 1$, konvergiert die Folge $c_n \to 1$.

A. 2: Wir beweisen, dass die Folge a_n nach oben beschränkt und monoton-wachsend ist.

(a) Wir zeigen: $a_n \le 2$. Induktion : $n = 0$: $0 \le 2$ - stimmt. ✓

Induktionsschritt:

$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \le \sqrt{2+2} = 2.$

(b) Wir zeigen: $a_{n+1} \ge a_n$. Da $a_n > 0$ ist, erhalten wir:

$$a_{n+1} \ge a_n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} \ge a_n \quad \Leftrightarrow \quad 2 + a_n \ge a_n^2 \quad \Leftrightarrow$$

$(a_n - 2)(a_n + 1) \le 0$. (Stimmt, da $a_n + 1 > 0$ und $a_n - 2 \le 0$.)

Damit konvergiert die Folge a_n. Sei $g = \lim a_n$. Dann ist

$$\sqrt{2 + g} = g \quad \Leftrightarrow \quad 2+g = g^2 \quad \Leftrightarrow \quad (g-2)(g+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g = 2 \vee g = -1.$$

Da die Folge a_n nur aus positiven Gliedern besteht, kann $g = -1$ nicht der Grenzwert sein. Also ist $\lim a_n = 2$.