# 7 Hausübungen

**A. 1:** Es gilt:

$$s_N = \sum_{n=2}^{N} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N}\Big(\log_2(n+1) - \log_2(n)\Big) =$$
$$= \log_2(N+1) - 1.$$

Da $s_N \to +\infty$, divergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

**A. 2:** (a) Da $\dfrac{n+1}{n^2+1} > \dfrac{1}{n}$ für $n \geq 1$ ist , divergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$ (weil $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert ).

(b) Da $\dfrac{\log_2 n}{2n+1} > \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n+1}$ und $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ divergiert, divergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log_2 n}{2n+1}$.

(c) $$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 2)$$

Da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$.

**A. 3:** Siehe Vorlesungsskript Seite 66ff.