8 Hausübungen

A. 1: (a)

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}. \quad \text{Dann ist:} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{n+1}{2^{2n+1}} = $$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right) \to 0.$$

Da $0 < 1$ ist, konvergiert die Reihe absolut.

(b)

$$a_n = \frac{n+2}{n(n+1)} \quad \text{Wir zeigen, dass } a_{n+1} \leq a_n.$$

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{n+2}{n(n+1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; n^2+3n \leq n^2+4n+4 \quad \text{-stimmt für } n \geq 1.$$

Da $a_n \to 0$, konvergiert die gegebene Reihe

nach dem Leibniz-Kriterium.

Wir beweisen, dass die Reihe nicht absolut konvergiert.

Da $\frac{n+2}{n(n+1)} > \frac{1}{n}$ und da

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch unsere gegebene Reihe.

A. 2: Wir zeigen, dass die Reihe nicht konvergiert.
Durch ausmultiplizieren erhhalten wir :

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}}_{A_N} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}_{B_N}.$$

Wir wissen, dass die Folge A_N konvergiert (Leibniz) und die Folge B_N divergiert (harmonische Reihe). Also divergiert auch die gegebene Reihe.

A. 3: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1) = 9 \cdot (\frac{10}{9} - 1) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$. Also sind $0,\bar{9}$ und 1 Symbole für ein und dieselbe reelle Zahl. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ ist keine Dezimalbruchentwicklung, weil $a_n = 9$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Dezimalbruchentwicklung der Zahl 1 ist einfach $\sum_{k=l}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ mit $a_0 = 1$ und $a_k = 0$ für alle $k \neq 0$.

(b) Die Abstände der Folgenglieder zur Zahl 1 können durch die Folge $\{0,1; 0,01; 0,001; \cdots\} = \{\frac{1}{10^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschrieben werden. Nachdem diese Folge eine Nullfolge ist, gibt es ein n_0, sodass $|\frac{1}{10^n}| < a$ für alle $n \geq n_0$ gilt. D.h. alle Folgenglieder der Folge $\{0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; \cdots\}$ mit einem Index $\geq n_0$ liegen rechts von $0,\bar{9}$, was den Widerspruch liefert.