9 Hausübungen

A. 1: Für alle $x \in (0, \infty)$ mit $x \neq 7$ bekommen wir:

$$f(x) = \frac{1}{x-7} - \frac{8}{x^2 - 6x - 7} = \frac{1}{x-7} - \frac{8}{(x-7)(x+1)} = \frac{1}{x-7}\left(1 - \frac{8}{x+1}\right) = \frac{1}{x-7}\left(\frac{x-7}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}.$$

Wähle also $a = \frac{1}{8}$. Dann ist für alle $x \in (0, \infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Da $\frac{1}{x+1}$ auf $(0, \infty)$ stetig ist, ist f auf $(0, \infty)$ auch stetig.

A. 2: (a) Sei $x_0 = 0$. Dann ist für jede Folge $x_n \to 0$:
$|f(x_n)| \leq |x_n| \to 0$.
Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$, d.h. f ist in 0 stetig.
Sei $0 \neq x_0 \in \mathbb{Q}$. Sei $x_n \to x_0$ mit $x_n \notin \mathbb{Q}$ (z.B. $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n} + x_0$).
Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq x_0 = f(x_0)$, d.h. f ist in x_0 nicht stetig.
Sei $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Sei $x_n \to x_0$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$. Dann ist:
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \neq 0 = f(x_0)$, d.h. f ist nicht stetig in x_0.
Antwort: Die Funktion f ist nur in einem Punkt $x_0 = 0$ stetig, sonst nicht stetig.

(b) Sei $x_0 \notin \mathbb{Z}$. Dann ist $[x]$ in x_0 stetig, also ist auch $f(x) = x(x - [x])$ stetig in x_0.
Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$. Dann ist für $n \geq 2$:

$$f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = \left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\left(x_0 - \frac{1}{n} - \left[x_0 - \frac{1}{n}\right]\right) = \left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\left(x_0 - \frac{1}{n} - (x_0 - 1)\right) = \left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to x_0.$$

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = \left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\left(x_0 + \frac{1}{n} - \left[x_0 + \frac{1}{n}\right]\right) = \left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\left(x_0 + \frac{1}{n} - x_0\right) = \left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \to 0.$$

Also wenn $x_0 \neq 0$, dann ist f in x_0 nicht stetig.
Sei $x_0 = 0$. Wir zeigen, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist.
Sei $x_n \to 0$. Dann ist:

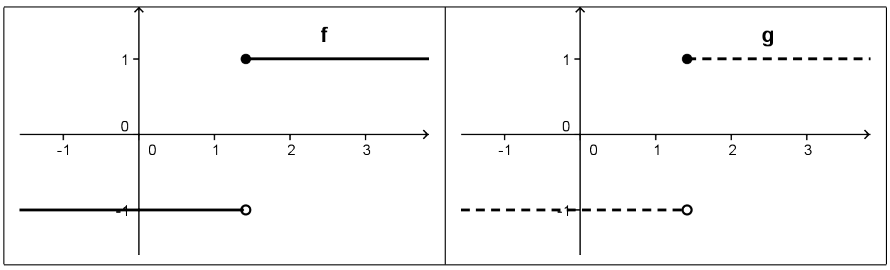
$$|f(x_n)| = |x_n(x_n - [x_n])| \leq |x_n| \to 0.$$

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$, d.h. f ist stetig in 0.
Antwort: Die Funktion f ist in den Punkten $\pm 1, \pm 2, \ldots$ nicht stetig, sonst stetig.

A. 3: (a) Die Funktion f ist nicht stetig an der Stelle $x = \sqrt{2}$. Das können wir zeigen, wenn wir für ein $\varepsilon > 0$ kein passendes δ finden.
Wählt man etwa $\varepsilon = 1$, so findet man kein $\delta > 0$, sodass $| f(x) - f(\sqrt{2}) | < \varepsilon$ für alle $x \in D_f$ mit $| x - \sqrt{2} | < \delta$ gilt. In jeder δ-Umgebung von $\sqrt{2}$ liegt nämlich ein $x \in (-\infty, \sqrt{2})$, also mit Funktionswert $f(x) = -1$. Es gilt dann:
$| f(x) - f(\sqrt{2}) | = | -1 - 1 | = 2 > \varepsilon$. Damit ist f nicht stetig auf D_f.

(b) Die Funktion g ist stetig (auf ganz D_g). Wir müssen dazu also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein passendes $\delta > 0$ angeben können.
Man kann, um die Stetigkeit an einer beliebigen Stelle x_0 nachzuweisen, z.B. $\delta = \frac{1}{2} \cdot | x_0 - \sqrt{2} |$ wählen (in diesem Beispiel ist also ausnahmsweise δ gar nicht von ε abhängig). Wählt man dann nämlich ein $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$, dann hat x denselben Funktionswert wie x_0. Es gilt also $| f(x) - f(x_0) | = 0 < \varepsilon$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

Dieses Beispiel zeigt, dass auch Funktionen, die nicht ohne Absetzen durchzeichenbar sind, stetig sein können. Andererseits zeigt es auch, dass sich das Stetigkeitsverhalten von Funktionen auf $\mathbb{Q}$ schlecht an deren Graph ablesen lässt.



Die Funktion g wurde gestrichelt dargestellt, um zu verdeutlichen, dass sie nur auf $\mathbb{Q}$ definiert ist.