Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. P. Neff

WS 09/10
16. Dezember 2009

Probeklausur zur Analysis I für Bachelor und Lehramt

Bitte benutzen Sie weißes Papier. Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren, nur einseitig beschriften, am Schluss der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name:..........................
Vorname:........................
Matr.-Nr.:.......................
Studiengang:...................

(deutlich lesbar ausgefüllt: 2 Punkte)

Aufgabe	0	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Mögl. Punktz.	2	5	10	10	10	10	10	57	
Err. Punktzahl									

---

1. **(5 Punkte)**

   Sei S die Menge aller Lehramtsstudenten im 1. Semester. Sei L die Menge aller zukünftigen Lehrer.

   (a) Formulieren Sie die Aussage mit Quantoren: *Alle Lehramtsstudenten werden Lehrer*.

   (b) Negieren Sie diese Aussage, ausformuliert in deutsch und mit Quantoren.

2. **(10 Punkte)**

   (a) Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Formel gilt:
   $$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1\,.$$

   (b) Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung
   $$2^n > 3n - 4$$
   gilt.

3. **(10 Punkte)**

   Sei
   $$A = \left\{ \frac{a+b}{a^2+b^2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{N} \right\},$$
   wobei $\mathbb{N}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen bezeichnet. Bestimmen Sie

   (a) das Supremum der Menge A,

   (b) das Infimum der Menge A.

Bitte wenden!

4. **(10 Punkte)**

   Entscheiden Sie, ob die Folge

$$a_n := 2^n \cdot \left(\frac{1}{4^n+1} + \frac{1}{4^n+2} + \frac{1}{4^n+3} + \ldots + \frac{1}{4^n+2^n} \right)$$

   konvergiert. Falls ja, bestimmen Sie ihren Grenzwert.

5. **(10 Punkte)**

   (a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf absolute Konvergenz und auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}.$$

   (b) Beweisen Sie: Für jede reelle Zahl x konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

   absolut.

6. **(10 Punkte)**

   (a) Sei $\{x_n\}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = g$ und $g > 0$.

   Beweisen Sie, dass die Folge $a_n := \sqrt[n]{x_n}$ gegen 1 konvergiert.

   (b) Stimmt diese Aussage auch, wenn $g = 0$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.