Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. P. Neff

WS 09/10
18. Februar 2010

Klausur zur Analysis I für Bachelor und Lehramt

Bitte benutzen Sie nur weißes Papier. Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren, nur einseitig beschriften, am Schluss der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name:...........................
Vorname:........................
Matr.-Nr.:......................
Studiengang: ....
Wiederholer (ja/nein):..........

(deutlich lesbar ausgefüllt: 2 Punkte)

Aufgabe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note
Mögl. Punktz.	2	6	10	10	10	10	10	10	10	78	
Err. Punktzahl											

---

1. **(6 Punkte)**

   Geben Sie zu jeder der folgenden Fehlvorstellungen je ein (möglichst einfaches) Gegenbeispiel an und begründen Sie, warum es sich dabei um ein Gegenbeispiel handelt!

   (a) *Wenn für zwei Folgen* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt, dass* $0<a_n<b_n$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$, *dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

   (b) *Wenn für eine Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *gilt, dass* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, *dann konvergiert die Reihe.*

   (c) *Wenn für eine Funktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *und eine Zahl* $x_0\in\mathbb{R}$ *gilt, dass* $f'(x_0)=0$, *dann besitzt* f *an der Stelle* x_0 *eine relative Extremstelle.*

2. **(10 Punkte)**

   Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für die die folgende Ungleichung gilt

   $$2^n \geq 6n-8\,.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

3. **(10 Punkte)**

   Beweisen Sie, dass der folgende Folgengrenzwert existiert und bestimmen Sie ihn:

   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{2n^4+1}+\frac{n^3+1}{2n^4+2}+\ldots+\frac{n^3+1}{2n^4+n}\right).$$

4. **(10 Punkte)**

   Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1)(1+2)\dots(1+n)}{(2n)!}$.

   Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die die Reihe konvergiert.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2+1)(a^2+2)\dots(a^2+n)}{(2n)!}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n}\right)^{n^2}$.

5. **(10 Punkte)**

   Sei $f(x)=x^{\sqrt{x}}$ für $x>0$ und $f(0)=1$.

   (a) Ist die Funktion f auf dem Intervall $[0,+\infty)$ stetig?

   (b) Bestimmen Sie den kleinsten und den größten Wert der Funktion f auf dem Intervall $[0,1]$.

6. **(10 Punkte)**

   Sei $f(x)=\dfrac{\log(1+|x|^3)}{x^2}$ für $x\neq 0$.

   Kann die Funktion f so in 0 definiert werden, dass f

   (a) stetig auf $\mathbb{R}$ wird?

   (b) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ wird?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

7. **(10 Punkte)**

   Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Außerdem gilt

   $$|f^{(n)}(x)|\leq 2^n \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R} \text{ und alle } n\in\mathbb{N}.$$

   (a) Beweisen Sie, dass die Reihe

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

   für jedes $x\in\mathbb{R}$ konvergiert.

   (b) Beweisen Sie, dass $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ ist.

8. **(10 Punkte)**

   Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall $[0,1]$

   $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)\,.$$