Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. P. Neff

WS 09/10
16. März 2010

Nachholklausur zur Analysis I für Bachelor und Lehramt

Bitte benutzen Sie nur weißes Papier. Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren, nur einseitig beschriften, am Schluss der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Familienname:..................
Vorname:......................
Matr.-Nr.:......................
Studiengang: ....
Wiederholer (ja/nein):..........

(deutlich lesbar ausgefüllt: 2 Punkte)

Aufgabe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note
Mögl. Punktz.	2	10	10	10	10	8	8	10	10	78	
Err. Punktzahl											

---

1. **(10 Punkte)**

   Die Folge $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ der reellen Zahlen erfülle:

   $x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad$ und $\quad x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \quad$ für alle natürlichen Zahlen n.

   Beweisen Sie, dass
   $$x_n = \frac{2^n}{6} - \frac{2\cdot(-1)^n}{3}$$
   für alle natürlichen Zahlen n.

2. **(10 Punkte)**

   Beweisen Sie, dass der folgende Folgengrenzwert existiert und bestimmen Sie ihn:
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1+n}{2n^2+1}\right)^n .$$

3. **(10 Punkte)**

   Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, so dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2-1}x^n$ konvergiert.

4. **(10 Punkte)**

   Sei $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = a$.

   (a) Bestimmen Sie den Wert a, so dass die Funktion f in 0 stetig wird.

   (b) Beweisen Sie, dass der folgende Folgengrenzwert existiert und bestimmen Sie ihn:

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{1}{\sqrt[n]{e} - 1} \right).$$

5. **(8 Punkte)**

   (a) Gibt es für jede stetige Funktion $f : [0,2] \to [0,1]$ eine Zahl $a \in [0,2]$ mit $f(a) = 2a$? Beweisen Sie es oder geben Sie ein Gegenbeispiel an!

   (b) Gibt es für jede stetige Funktion $f : [0,2] \to [0,1]$ eine Zahl $b \in [0,2]$ mit $f(b) = \frac{1}{2}b$? Beweisen Sie es oder geben Sie ein Gegenbeispiel an!

6. **(8 Punkte)**

   Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^2 - 2x + 4$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass es eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $f'(x_0) = 0$.

   Bemerkung: Sie sollen die Stelle x_0 nicht berechnen!

7. **(10 Punkte)**

   Sei $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{|x|}$ für $x \neq 0$.

   Kann die Funktion f so in 0 definiert werden, dass f

   (a) stetig auf $\mathbb{R}$ wird?

   (b) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ wird?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

8. **(10 Punkte)**

   Sei $f_n(x) = \dfrac{x}{ne^{nx}}$ für $x \geq 0$.

   (a) Bestimmen Sie die Supremumsnorm der Funktion f_n auf dem Intervall $[0, \infty)$.

   (b) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{ne^{nx}}$$

   auf dem Interval $[0, \infty)$ wohldefiniert ist, d.h. die obige Reihe konvergiert für alle $x \in [0, \infty)$.

   (c) Beweisen Sie, dass die Funktion f auf dem Intervall $[0, \infty)$ stetig ist.