Musterlösung Blatt 6

Aufgabe 1:

Die Euler Lagrange Gleichung lautet

$\frac{d}{dx} 2y' = 1$ auf $[0,1]$.

Da $F_{y'y'}(x, y, y') = 2 > 0$ auf ganz $[0,1]$

ist $y \in C^2[0,1]$.

Wir erhalten also $2y'(x) = x + c_1$

und $y(x) = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} c_1 x + c_2$

(1) Die natürlichen RB sind $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$ die von keiner Lösung erfüllt werden, da $y'(1) = \frac{1}{2}$ sofern $y'(0) = 0$.

(2) $y(x) = \frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{4} x$

(3) Es ist $\delta^2 I(\hat{y})(\varphi,\varphi) = \int_0^1 (\varphi')^2 dx \geq 0$

für alle $\hat{y} \in C^1[0,1] \cap \{y(0)=0, y(1)=1\}$

Also ist jede Lösung der Euler-Lagrange Gleichung ein globaler Minimierer.

Aufgabe 2

Die Euler Lagrange Gleichung lautet

$$\frac{d}{dx} 2y' = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{auf } [a,b]$$

Mit $F(y, y') = (y')^2 + \arctan(x)$

gilt $F_{y'y'}(x, y') = 2 > 0$ und

somit $y \in C^2[a,b]$.

Also gilt $2y'' = \frac{1}{1+y^2} > 0$ auf $[a,b]$

Natürliche RB sind hier

$y'(a) = 0$ und $y'(b) = 0$

Nach dem Satz von Rolle gibt es dann aber ein $z \in (a,b)$ mit $y''(z) = 0$. Dies ist aber durch die Euler-Lagrange Gleichung ausgeschlossen.

Es gibt also keinen Minimierer, obwohl

$$I(y) \geq -\frac{\pi}{2}(b-a).$$

3/ Wir definieren

$$\varphi(x, u, \xi) = \Phi_u(x, u) \cdot \xi + \Phi_x(x, u)$$

Wir sehen, dass für alle $u \in \{ u \in C^1([a,b]) \; \begin{array}{l} u(a)=\alpha \\ u(b)=\beta \end{array} \}$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left[\Phi(x, u(x)) \right] dx = \Phi(b, \beta) - \Phi(a, \alpha) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi_\xi(x, u, u') \right] = \varphi_u(x, u, u'), \quad x \in [a,b]$$

$\tilde{f}$ erfüllt also die ELG und erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.3.

Es gilt

$$I(u) = \int_a^b \hat{f}(x, u(x), u'(x))\, dx = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

und

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi \right] = f_u$$

$$\frac{d}{dx}\left[\hat{f}_\xi \right] = \tilde{f}_u$$

Minimiert u also das Funktional zu $\tilde{f}$, so auch das zu f.