

**A 20**

Lösen Sie simultan das folgende lineare Gleichungssystem für die beiden angegebenen Zielvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$

$$\begin{array}{rclcl} 1 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & = & 1 & 1 \\ 0 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & - & 1 \cdot x_3 & = & 1 & 2 \end{array}$$

**A 21**

Sind die folgenden drei Zeilenvektoren  $a, b, c$  linear unabhängig?

$$\begin{aligned} a &= (1 \quad -1 \quad 1 \quad 1) \\ b &= (0 \quad 1 \quad -2 \quad 0) \\ c &= (1 \quad -2 \quad 1 \quad 1) \end{aligned}$$

**A 22**

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**A 23**

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS.

$$\begin{array}{rclcl} 1 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & + & 3 \cdot x_4 & = & 4 \\ 1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & + & 2 \cdot x_4 & = & 0 \\ 1 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & - & 1 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 2 \\ 2 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & + & 5 \cdot x_4 & = & 4 \end{array}$$

(b) Wieviele der vier Gleichungen können entfallen, ohne dass sich der Informationsgehalt des LGS reduziert (bzw. die Lösungsmenge verändert)?

**T 21**

Lösen Sie simultan das folgende lineare Gleichungssystem für die beiden angegebenen Zielvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$

$$\begin{array}{rclcl} 3 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 2 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & = & 1 & -1 \\ 1 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 1 & 2 \end{array}$$

**T 22**

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**T 23**

Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlußtableau eines simultan durchgeführten Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge  $L_b$  und  $L_c$  der zugehörigen linearen Gleichungssysteme  $Ax = b$  und  $Ax = c$

$$A \left\{ \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & c \\ \hline 2 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Algorithmus} \\ \longrightarrow \dots \longrightarrow \end{array} \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* & c^* \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

**T 24**

- (a) Bei Aufgabe T 17 (b) sei umgekehrt ein Rohstoffvorrat  $R = (35 \ 13)^T$  vorgegeben. Geben Sie ein Produktionsziel an, das genau mit dem Vorrat  $R$  auskommt. Ist dies die einzige Lösung?
- (b) Wie ist die Gleichung  $M_{RE} \cdot E = R$  hier auch allgemein lösbar (ggf. Inverse mit dem GJ-Algorithmus berechnen)?

**T 25**

Führen Sie für die folgenden Tabellen den GJ-Algorithmus durch.

$A$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$b$	$c$	$d$	EGK:	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$b^*$	$c^*$	$d^*$
{	1	2	3	4	5	6		1	0	-1	-2	-3	-4
	2	3	4	5	6	7		0	1	2	3	4	5
	3	4	5	6	7	8		0	0	0	0	0	0

Geben Sie dann alle Fragestellungen an, deren Beantwortung Sie am Schlußtableau ablesen können und ggf. die Antwort.

- (a) Lösung der LGS  $Ax = b$ ,  $Ax = c$ ,  $Ax = d$ , und hierzu jeweils
  - (a1) Anzahl der überflüssigen Gleichungen des LGS
  - (a2) Anzahl der frei wählbaren Variablen
  - (a3) Lösungsmenge
- (b) Lösung der Matrixgleichung  $A \cdot X = B$ , wobei  $B := (d|b|c)_{3 \times 3}$
- (c) Rang der Matrizen  $A$ ,  $(A|b)$ ,  $(A|c)$ ,  $(A|d)$
- (d) Lineare Unabhängigkeit der Spalten (Zeilen) von  $A$
- (e) Invertierbarkeit von  $A$  und ggf. die Inverse  $A^{-1}$

**T 26**

Wie Aufgabe T 25 mit

$A$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$b$	$c$	$d$	EGK:	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$b^*$	$c^*$	$d^*$
{	1	2	3	1	0	0		1	0	0	-14/9	4/9	1/9
	4	5	9	0	1	0		0	1	0	13/9	-5/9	1/9
	7	8	6	0	0	1		0	0	1	-1/9	2/9	-1/9

**T 27**

Wie Aufgabe T 25 mit

$$A \left\{ \begin{array}{ccc|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{EGK: } \left\{ \begin{array}{ccc|c|c|c} x_2 & x_3 & x_1 & b^* & c^* & d^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

**T 28**

Wie Aufgabe T 25 mit

$$A \left\{ \begin{array}{ccc|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{EGK: } \left\{ \begin{array}{ccc|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* & c^* & d^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$