

A 24 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, falls

- (a) $a_n := \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ (b) $a_n := -\left(\frac{1}{n}\right)^r$ (für $r \in \mathbb{Q} \cap]0, \infty[$)
 (c) $a_n := c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + d$ (für $c, d \in \mathbb{R}$) (d) $a_n := c \cdot 2^n$ (für $c \in \mathbb{R}$)
 (e) $a_n := \frac{d}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e}$ (für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

A 25 Rechenregeln für Quotienten von Folgen

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, für $n \rightarrow \infty$

- (a) $a_n = \frac{n^3 - 2n^2 + 5}{4n^3 - 7n}$
 (b) $a_n = \frac{5n^{4/5} - n^{3/4}}{3n^{5/6} + 2n^{2/3}}$
 (c) $a_n = \frac{2n^2 + 6 + 5 \cdot n^3}{10n^3 - 17n^4 + 37}$

A 26 Regeln für Grenzwerte zusammengesetzter Funktionen

Bilden Sie folgende Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) \cdot e^{2 \cdot (x-2)}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^2 + x)$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-1} + e^{1-x} - 2}{(x-1)^2}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} + e^{1-x} - 2) \cdot (x-1)^2$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} ((x+1)^3 - 3x^2 - 3x - 1)$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} ((x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 2x - 1)$
 (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x^2}{x-2x^2}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^3 - 3x^2 - 3x - 1}{(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 2x - 1}$

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Funktionen $f(x)$ der Grenzwert in den „Nahtstellen“ existiert, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

(k) Nahtstelle „ $x = 3$ “ und

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} & \text{für } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

(l) Nahtstelle „ $x = -2$ “ und

$$f(x) = \begin{cases} (4 \cdot x)^{1/3} & \text{für } -4 \leq x < -2 \\ (x+1) \cdot e^{2(x+2)} & \text{für } -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

T 29 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, für $n \rightarrow \infty$

$$(a) \ a_n = 4 - \frac{7}{\sqrt{n^5}} + (\sqrt{n})^3 \quad (b) \ a_n = \left(4 - \frac{7}{\sqrt{n^5}} + (\sqrt{n})^{-3}\right) \cdot (n^{-3/4} - 2 \cdot n^{-1/4} + \frac{5}{n^2} + 7)$$

$$(c) \ a_n = \frac{n^3 - 2n^2 + 5}{4n^3 - 7n} \quad (d) \ a_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \quad (e) \ a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{2}$$

$$(f) \ a_n = \frac{n^{3/4} - 2n^{5/4} + 5n^{-1/2} - 7n^{3/2}}{4n^{3/2} - 7n^{-1} + n^{4/3}}$$

T 30 Rechenregeln für Grenzwerte zusammengesetzter Funktionen

Bilden Sie folgende Grenzwerte:

$$(a) \ \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot e^{(x+1)^2-4} \quad (b) \ \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^3 + e - 1)$$

$$(c) \ \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \cdot e^{2 \cdot (x-2)} \quad (d) \ \lim_{x \rightarrow -2} (|4 \cdot x|^{1/3})$$

$$(e) \ \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \ln(1+x^2) \quad (f) \ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2 - 2(1+x)}{x^2 - 3}$$

$$(g) \ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 1}{6x^3 - 3x^2 - 2x - 1} \quad (h) \ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3 - 3x^2 - 3x - 1}{(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 2x - 1}$$

$$(i) \ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{\ln x} \quad (j) \ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1+1/x}{\ln x} \quad (k) \ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1+1/x}{\ln x}$$

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Funktionen $f(x)$ der Grenzwert in den „Nahtstellen“ existiert, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

(l) Nahtstelle „ $x = 1$ “ und

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{(x+1)^2-4} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \ln(x^3 + e - 1) & \text{für } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(m) Nahtstelle „ $x = -2$ “ und

$$f(x) = \begin{cases} (4 \cdot |x|)^{1/3} & \text{für } -3 \leq x < -2 \\ 2 + \ln(3+x) & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$